Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Константинов, Спектральный анализ одного класса матричных дифференциальных операторов, *Функци. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 3, 77–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa481>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:48:56

УДК 517.9

Спектральный анализ одного класса матричных дифференциальных операторов

© 1997. А. Ю. КОНСТАНТИНОВ

1. В последние годы интенсивно изучаются спектральные свойства рациональных операторнозначных функций и (или) ассоциированных с ними блочных операторных матриц [1–8]. В частности, с уравнением Шрёдингера с потенциалом, рационально зависящим от спектрального параметра [2–4], ассоциирован оператор вида

$$\begin{pmatrix} -\Delta + q & v \\ \bar{v} & h \end{pmatrix}.$$

Операторы типа (1) исследовались в ограниченных областях пространства $\mathbb{R}^n$ [3, 4]. В то же время спектральная теория таких операторов во всем $\mathbb{R}^n$ почти не изучена. Отметим лишь недавнюю работу [7], где предлагается абстрактный подход к определению существенного спектра матричных дифференциальных операторов в неограниченной области и ставится вопрос об исследовании более тонкой структуры спектра таких операторов. Настоящая работа посвящена теории рассеяния и спектральному анализу одного класса матричных операторов, включающего в себя операторы вида (1).

2. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{H} = (L_2(\mathbb{R}^n))^2$ операторы

$$H = \begin{pmatrix} (-\Delta)^l + q & \sum_{|\alpha| < l} D^\alpha v_\alpha \\ \sum_{|\alpha| < l} (-1)^{|\alpha|} \bar{v}_\alpha D^\alpha & h \end{pmatrix}, \quad H_0 = \begin{pmatrix} (-\Delta)^l & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}.$$

Здесь $l = 1, 2, \dots$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ — мультииндекс, D^α — соответствующая частная производная, v_α — ограниченные функции класса $C^{|\alpha|}$, q — ограниченная и h — непрерывная вещественные функции. Оператор H существенно самосопряжен в $\mathcal{H}$ на $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^2$ (см., например, [5]). Отметим, что при $l = 1$ H является оператором вида (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть

$$|q(x)| + \sum_{|\alpha| < l} |v_\alpha(x)| (|h(x)| + 1)^{-1} \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Тогда разность резольвент операторов H и H_0 компактна и, в частности, $\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma_{\text{ess}}(H_0) = [0, \infty) \cup \overline{h(\mathbb{R}^n)}$.

Отметим, что хотя предложение 1 и элементарно, но оно не вытекает из общих результатов [7]. В частности, функции v_α могут не убывать на бесконечности. Для изучения более тонких спектральных свойств оператора H мы применяем вариант гладкой теории рассеяния, основанный на локальных коммутаторных оценках Мурра [9–11]. Будем предполагать, что $h \in C^3(\mathbb{R}^n)$. Точка $\lambda \in \mathbb{R}$ называется пороговым значением функции h , если $\inf \{|h'(x)| : h(x) \in J\} = 0$ для любой открытой окрестности J точки λ . Ниже $\tau(h)$ — множество пороговых значений функции h , $\tau := \tau(h) \cup \{0\}$, $f_\alpha := v_\alpha(h+i)^{-1}$. Обозначим через $\sigma_{\text{ac}}(A)$

абсолютно непрерывный спектр самосопряженного оператора A , а через $P_{ac}(A)$ проектор на абсолютно непрерывное подпространство этого оператора. Будем говорить, что функция v на $\mathbb{R}^n$ является короткодействующим потенциалом (потенциалом Энсса), если

$$\int_1^\infty \text{esssup}\{|v(x)| : |x| \geq r\} dr < \infty.$$

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что*

- (i) *потенциалы q и f_α ($|\alpha| < l$) короткодействующие;*
- (ii) *$f_\alpha \in C^2(\mathbb{R}^n)$, производные f'_α , f''_α ограничены на $\mathbb{R}^n$ и $|f'_\alpha|^2$ — короткодействующий потенциал ($|\alpha| < l$);*
- (iii) *для произвольного компакта $K \subset \mathbb{R} \setminus \tau$ существует $c > 0$, такое, что, как только $h(x) \in K$,*

$$|h''(x)| \leq c|h'(x)|^2, \quad |h'''(x)| \leq c|h'(x)|^3;$$

- (iv) *множество τ не более чем счетно.*

Тогда

- (a) *волновые операторы $W^\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)$ существуют и полны; в частности, абсолютно непрерывные части операторов H и H_0 унитарно эквивалентны и $\sigma_{ac}(H) = \sigma_{ac}(H_0)$;*
- (b) *H не имеет сингулярно непрерывного спектра;*
- (c) *собственные значения оператора H , не принадлежащие τ , конечно-кратны и не могут иметь (конечных) точек накопления вне τ .*

Прокомментируем условия теоремы 1. Пункт (iii) является важным техническим условием, гарантирующим в нашей ситуации возможность применения метода Мурра (см. [10]), а (iv) обеспечивает отсутствие сингулярно непрерывного спектра. Так как невозмущенный оператор H_0 действует на части пространства $\mathcal{H}$ как степень оператора Лапласа, а на другой части как оператор умножения, то для существования волновых операторов возмущение (разность резольвент операторов H и H_0) должно быть короткодействующим как по пространственным, так и по импульсным переменным. Убывание по пространственным переменным дает условие (i). Убывание по импульсным переменным обеспечивается тем, что порядок возмущения меньше l . При этом условие (ii) обеспечивает определенную регулярность возмущения. Оно может быть ослаблено. Например, вместо ограниченности f''_α достаточно требовать, чтобы операторы умножения на f_α были ограничены в соболевском пространстве $W_2^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ при некотором $\varepsilon > 0$.

В условиях теоремы 1 для оператора H справедлив принцип предельного поглощения. Пусть $T_\varepsilon = \text{diag}\{(1 + |x|^2)^{-1/4-\varepsilon}, (-\Delta + 1)^{-1/4-\varepsilon}\}$ — диагональный оператор в $\mathcal{H}$, а $\sigma_p(H)$ — точечный спектр оператора H .

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнены условия (i)–(iii) теоремы 1. Тогда для произвольных $\varepsilon > 0$ и компакта $K \subset \mathbb{R} \setminus (\tau \cup \sigma_p(H))$*

$$\sup\{\|T_\varepsilon(H - z)^{-1}T_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} : Re z \in K, \text{Im } z \neq 0\} < \infty.$$

Отметим, что в условиях теоремы 2 принцип предельного поглощения выполняется в более тонкой шкале пространств Бесова (см. [10]).

3. Теорема 1 неверна для возмущений порядка l . В этом случае происходит определенный сдвиг существенного спектра оператора H [7] и для пары H, H_0 уже не могут существовать полные волновые операторы. В то же время в связи с различными приложениями в математической физике [12–14] этот случай представляет особый интерес. Здесь мы приведем лишь один модельный пример, показывающий, что техника, развитая при доказательстве теоремы 1, может работать и в этой ситуации. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{H} = (L_2(\mathbb{R}^n))^n \times L_2(\mathbb{R}^n)$ блочный матричный оператор

$$H = \begin{pmatrix} -\Delta + q & -\operatorname{grad} b + v \\ \bar{b} \operatorname{div} + v^* & h \end{pmatrix}.$$

Здесь h — непрерывная вещественная функция на $\mathbb{R}^n$, b — ограниченная гладкая функции на $\mathbb{R}^n$, q, v — ограниченные функции на $\mathbb{R}^n$, значениями которых являются соответственно эрмитовы матрицы размера $n \times n$ и комплексные матрицы размера $n \times 1$, v^* — матрица, сопряженная к v . В этих предположениях H существенно самосопряжен на $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^{n+1}$ (см., например, [5]). Положим $f := (h + i)^{-1}v$, $g := (h + i)^{-1}b$, $h_0 := h - |b|^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Предположим, что*

$$|q(x)| + |g(x)| + |f(x)| \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Тогда $\sigma_{\text{ess}}(H) = [0, \infty) \cup \overline{h_0(\mathbb{R}^n)}$.

Отметим, что для убывающих на бесконечности функций b и v предложение 2 вытекает из результатов [7]. Ниже считаем, что $h_0 \in C^4(\mathbb{R}^n)$ и $\tau = \tau(h_0) \cup \{0\}$.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что*

- (i) q, f, g — короткодействующие потенциалы;
- (ii) $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ и функции f', f'', g', g'' ограничены;
- (iii) для некоторого $c > 0$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$|h_0''(x)| + |h_0'''(x)| + |h_0^{\text{IV}}(x)| \leq c(1 + |h_0(x)| + |h_0'(x)|);$$

- (iv) множество $\tau(h_0)$ не более чем счетно.

Тогда $\sigma_{\text{ac}}(H) = [0, \infty) \cup \sigma_{\text{ac}}(h_0)$ и выполнены утверждения (b), (c) теоремы 1 и утверждения теоремы 2.

Предложение 2 и теорема 3 показывают, что для убывающих функций q, g, f оператор H естественно рассматривать как возмущение «сдвинутого» диагонального оператора $H^0 = \operatorname{diag}\{-\Delta, h_0\}$. В то же время это возмущение уже не является короткодействующим по импульсной переменной p (разность резольвент операторов H и H^0 убывает, как $|p|^{-1}$). Последнее не позволяет, вообще говоря, утверждать существование обычных волновых операторов для пары H и H^0 (ср. с теоремой 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Adamjan V. M., Langer H. J. Operator Theory, **33**, 259–277 (1995).
2. Богомолова Е. П. Диф. уравн., **21**, №11, 1843–1849 (1985).
3. Faierman M., Mennicken R. Manuscripta Mathematica, **73**, 319–333 (1991).
4. Langer H., Mennicken R., Möller M. Operator Theory: Advances and Applications, **48**, 319–332 (1990).
5. Mennicken R., Shkalikov A. A. Math. Nachr., **179**, 259–273 (1996).
6. Мотовилов А. К. ТМФ, **104**, №2, 281–303 (1995).
7. Шкаликов А. А. Матем. заметки, **58**, №6, 945–949

(1995). **8.** Степин С. А. Функц. анализ и его прил., **29**, вып. 2, 22–35 (1995). **9.** Mourre E. Comm. Math. Phys., **78**, 391–408 (1981). **10.** Amrein W., Boutet de Monvel A., Georgescu V. *C₀-Groups, Commutator Methods and Spectral Theory of N-Body Hamiltonians*. Birkhäuser, Basel (1996). **11.** Цикон Х., Фрезе Р., Кириш В., Саймон Б. Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. Мир, М. (1990). **12.** Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидромеханика. Наука, М. (1986). **13.** Lifschitz A. E. Magnetohydrodynamics and spectral theory. Kluwer Acad. Publishers, Dodrecht (1989). **14.** Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. Наука, М. (1989).

Киевский университет,
кафедра математического анализа

Поступило в редакцию
28 июля 1996 г.

УДК 517.98

О почти коммутирующих операторах*

© 1997. В. М. МАНУЙЛОВ

В настоящей заметке исследуется вопрос о возможности прогомоторировать один из двух почти коммутирующих операторов к единице так, чтобы норма коммутатора вдоль всего пути была мала. В общем случае ответ отрицательный [4, 2], более того, в работе [2] определено топологическое препятствие для существования такой гомотопии. Мы приводим случай, когда такая гомотопия существует. Напомним, что условие $RR(A) = 0$ означает [1], что среди самосопряженных элементов C^* -алгебры A плотны элементы с конечным спектром; поэтому без ограничения общности можно считать, что $h = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$ — конечная линейная комбинация проекторов $p_i \in A$, где собственные значения упорядочены по убыванию. Напомним также, что условие $\text{tsr}(A) = 1$ означает [3], что обратимые элементы плотны в A .

ТЕОРЕМА 1. Пусть A есть C^* -алгебра со следующими свойствами:

- (i) $RR(A) = 0$ и $\text{tsr}(A) = 1$;
 - (ii) для любого проектора $p \in A$ унитарная группа C^* -алгебры pAp связна.
- Пусть $h, u \in A$ — самосопряженный и унитарный элементы, такие, что

$$\|u^*hu - h\| < \delta. \quad (1)$$

Тогда существует константа C , зависящая только от $\|h\|$, и путь $u(t)$, соединяющий u с 1 , такой, что при достаточно малом δ для всех t

$$\|u^*(t)hu(t) - h\| < C\sqrt[4]{\delta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем спектр оператора h на мелкие отрезки длины $\sqrt[4]{\delta}$ и пронумеруем те из них, которые содержат хотя бы одну точку спектра. Тогда $\text{Sp}(h) \subset \bigcup_{k=1}^m \Delta_k$. Без ограничения общности можно считать, что точки спектра оператора h не совпадают с концами отрезков Δ_k . Отметим, что если отрезки Δ_k и Δ_{k+1} не примыкают друг к другу, то спектр оператора h имеет лауну длины не менее чем $\sqrt[4]{\delta}$. Обозначим спектральные проекторы оператора h , отвечающие отрезкам Δ_k , через q_k , $q_1 + \dots + q_m = 1$.

* Настоящая работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант №96-01-00182).