Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Мануйлов, О почти коммутирующих операторов, *Функци. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 3, 80–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa482>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:47:45

(1995). **8.** Степин С. А. Функц. анализ и его прил., **29**, вып. 2, 22–35 (1995). **9.** Mourre E. Comm. Math. Phys., **78**, 391–408 (1981). **10.** Amrein W., Boutet de Monvel A., Georgescu V. *C₀-Groups, Commutator Methods and Spectral Theory of N-Body Hamiltonians*. Birkhäuser, Basel (1996). **11.** Цикон Х., Фрезе Р., Курш В., Саймон Б. Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. Мир, М. (1990). **12.** Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидромеханика. Наука, М. (1986). **13.** Lifschitz A. E. Magnetohydrodynamics and spectral theory. Kluwer Acad. Publishers, Dodrecht (1989). **14.** Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. Наука, М. (1989).

Киевский университет,
кафедра математического анализа

Поступило в редакцию
28 июля 1996 г.

УДК 517.98

О почти коммутирующих операторах*

© 1997. В. М. МАНУЙЛОВ

В настоящей заметке исследуется вопрос о возможности прогомоторировать один из двух почти коммутирующих операторов к единице так, чтобы норма коммутатора вдоль всего пути была мала. В общем случае ответ отрицательный [4, 2], более того, в работе [2] определено топологическое препятствие для существования такой гомотопии. Мы приводим случай, когда такая гомотопия существует. Напомним, что условие $RR(A) = 0$ означает [1], что среди самосопряженных элементов C^* -алгебры A плотны элементы с конечным спектром; поэтому без ограничения общности можно считать, что $h = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$ — конечная линейная комбинация проекторов $p_i \in A$, где собственные значения упорядочены по убыванию. Напомним также, что условие $\text{tsr}(A) = 1$ означает [3], что обратимые элементы плотны в A .

ТЕОРЕМА 1. Пусть A есть C^* -алгебра со следующими свойствами:

- (i) $RR(A) = 0$ и $\text{tsr}(A) = 1$;
 - (ii) для любого проектора $p \in A$ унитарная группа C^* -алгебры pAp связна.
- Пусть $h, u \in A$ — самосопряженный и унитарный элементы, такие, что

$$\|u^*hu - h\| < \delta. \quad (1)$$

Тогда существует константа C , зависящая только от $\|h\|$, и путь $u(t)$, соединяющий u с 1 , такой, что при достаточно малом δ для всех t

$$\|u^*(t)hu(t) - h\| < C\sqrt[4]{\delta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем спектр оператора h на мелкие отрезки длины $\sqrt[4]{\delta}$ и пронумеруем те из них, которые содержат хотя бы одну точку спектра. Тогда $\text{Sp}(h) \subset \bigcup_{k=1}^m \Delta_k$. Без ограничения общности можно считать, что точки спектра оператора h не совпадают с концами отрезков Δ_k . Отметим, что если отрезки Δ_k и Δ_{k+1} не примыкают друг к другу, то спектр оператора h имеет лауну длины не менее чем $\sqrt[4]{\delta}$. Обозначим спектральные проекторы оператора h , отвечающие отрезкам Δ_k , через q_k , $q_1 + \dots + q_m = 1$.

* Настоящая работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант №96-01-00182).

Тогда можно разложить A в прямую сумму, соответствующую этим проекторам, $A = \bigoplus_{k=1}^m q_k A$, и представлять элементы алгебры A как матрицы по отношению к этому разложению, $a = (a_{ij})$, где $a \in A$, $a_{ij} = q_i a q_j$. Пусть μ_k — середины отрезков Δ_k . Определим блочно-трехдиагональную матрицу $d(a)$ следующим образом:

- (i) если $j \geq i + 2$ или $j \leq i - 2$, то положим $d(a)_{ij} = 0$;
- (ii) если $j = i \pm 1$ и $|\mu_j - \mu_i| > \sqrt[4]{\delta}$, то положим также $d(a)_{ij} = 0$;
- (iii) в остальных случаях положим $d(a)_{ij} = a_{ij}$.

Обозначим через $d_k(a)$ диагональ матрицы a , лежащую на k диагоналей выше (или ниже, если k отрицательно) главной. Неравенство (1) означает, что матрица u почти трехдиагональная:

ЛЕММА 2. Для достаточно малых δ выполнено неравенство $\|u - d(u)\| < 4\|h\|\sqrt[4]{\delta}$.

Первый шаг гомотопии состоит в том, что мы соединяем матрицы u и $d(u)$ отрезком. Конечно, этот путь не является унитарным, но лежит вблизи унитарной группы U :

$$\text{dist}(u(t), U) < 4\|h\|^{1/2}\sqrt[4]{\delta}, \quad (2)$$

и вдоль этого пути $\|u(t)h - hu(t)\| < 2\delta + 2\|h\|4\|h\|^{1/2}\sqrt[4]{\delta}$.

Следующая лемма показывает, что можно прогомотопировать матрицу к почти верхнетреугольному виду.

ЛЕММА 3. Пусть $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — матрица в $q_{j_1}A \oplus q_{j_2}A$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует унитарный путь $v(t)$, такой, что $v(0) = 1$ и $v(1)a = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}$, где $\|a'_{21}\| < \varepsilon$.

Второй шаг гомотопии. Рассмотрим элемент u_{21} матрицы u . Если отрезки Δ_1 и Δ_2 соприкасаются, то элемент u_{21} достаточно мал и по определению $d(u)_{21} = d(u)_{12} = 0$. В этом случае положим $v_1 = 1$. В противном случае воспользуемся предыдущей леммой и найдем унитарную 2×2 -матрицу v_1 , умножение на которую уменьшит норму элемента u_{21} почти до нуля. Следующий участок гомотопии определим как путь, определенный умножением $d(u)$ на $v_1(t)$ с последующим обнулением элемента u'_{21} . Затем обратимся к элементу u_{32} и аналогично определим матрицу v_2 , отличную от единичной матрицы только на пересечении 2-й и 3-й строк и столбцов, после умножения на которую можно считать, что $u'_{32} = 0$. Повторяя эту процедуру, получим путь, определенный унитарной матрицей $v = v_{m-1} \cdots v_2 v_1$. Обозначим $v \cdot d(u)$ через $\bar{u}$. Очевидно, что матрица $\bar{u}$ является трехдиагональной и верхнетреугольной. При этом вдоль указанного пути сохраняется оценка (2). Но тогда из близости матрицы $\bar{u}$ к унитарным норма ее верхнетреугольной части также мала; следовательно, матрица $\bar{u}$ почти диагональна, а именно

$$\|\bar{u} - d_0(\bar{u})\| < 24\|h\|^{1/2}\sqrt[4]{\delta}, \quad (3)$$

и, значит, ее диагональные элементы обратимы. Кроме того, поскольку путь, соединяющий $d(u)$ с $\bar{u}$, лежит в множестве четырехдиагональных матриц (диагонали от -1 -й до 2 -й), норма коммутатора может быть оценена:

$$\|\bar{u}(t)h - h\bar{u}(t)\| < 6\|h\|^{1/2}\sqrt[4]{\delta}.$$

Третий шаг гомотопии. Соединим матрицы $\bar{u}$ и $d_0(\bar{u})$ отрезком. При этом из (3) следует, что $\text{dist}(u(t), U) < 28 \|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}$. После того как мы привели матрицу u к блочно-диагональному виду $d_0(\bar{u})$, любой путь, лежащий в множестве матриц такого вида, дает малую норму коммутатора: $\|u(t)h - hu(t)\| < \sqrt[4]{\delta}$. Выберем такой путь, соединяющий матрицу $d_0(\bar{u})$ с единицей так, чтобы этот путь не удалялся от унитарной группы более чем на $28 \|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}$.

Итак, нами построен путь $u(t)$, соединяющий исходный оператор u с единицей и такой, что $\text{dist}(u(t), U) < 28 \|h\|^{1/2} \delta$ и $\|u(t)h - hu(t)\| < 6 \sqrt[4]{\delta}$. Но тогда существует унитарный путь $u'(t)$, такой, что $\|u'(t) - u(t)\| < 56 \|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}$. При этом вдоль этого пути выполняется требуемая оценка

$$\|u'(t)h - hu'(t)\| \leq \|u(t)h - hu(t)\| + 2 \|h\| \|u'(t) - u(t)\| < C \sqrt[4]{\delta}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Тем же способом можно доказать аналогичный результат в случае, когда вместо самосопряженного оператора h рассматривается унитарный оператор v , имеющий в спектре лауну фиксированной длины.

Автор благодарен А. С. Мищенко и Е. В. Троицкому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brown L. G., Pedersen G. K. J. Funct. Anal., **99**, 131–149 (1991).
2. Exel R., Loring T. A. J. Funct. Anal., **95**, 364–376 (1991).
3. Rieffel M. A. J. Operator Theory, **17**, 237–254 (1987).
4. Voiculescu D. Acta Sci. Math. (Szeged), **45**, 429–431 (1983).

Московский государственный
университет

Поступило в редакцию
7 мая 1996 г.

УДК 517.164.152

Критические точки произвольных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ *

© 1997. М. А. Панков, Е. А. Полулях

1. Введение. В работах М. Гусмана [1, 2] можно найти следующее определение критической точки произвольного отображения $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *критической* (в смысле Гусмана) точкой отображения f , если существует система n -мерных кубов $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ с центрами в точке x , диаметры которых стремятся к 0 при $i \rightarrow \infty$, и таких, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\text{mes } f(K_i)}{\text{mes } K_i} = 0.$$

Здесь и далее mes — внешняя мера Лебега (напомним, что внешняя мера определена для произвольного подмножества пространства $\mathbb{R}^n$). Несложно показать корректность данного определения, т.е. если $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, то точка x принадлежит $\Sigma(f)$ тогда и только тогда, когда она является критической точкой в

* Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда Дж. Сороса (грант U6F200).