Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Панков, Е. А. Полулях, Критические точки произвольных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 3, 82–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 18:21:22

Третий шаг гомотопии. Соединим матрицы $\bar{u}$ и $d_0(\bar{u})$ отрезком. При этом из (3) следует, что $\text{dist}(u(t), U) < 28 \|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}$. После того как мы привели матрицу u к блочно-диагональному виду $d_0(\bar{u})$, любой путь, лежащий в множестве матриц такого вида, дает малую норму коммутатора: $\|u(t)h - hu(t)\| < \sqrt[4]{\delta}$. Выберем такой путь, соединяющий матрицу $d_0(\bar{u})$ с единицей так, чтобы этот путь не удалялся от унитарной группы более чем на $28 \|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}$.

Итак, нами построен путь $u(t)$, соединяющий исходный оператор u с единицей и такой, что $\text{dist}(u(t), U) < 28 \|h\|^{1/2} \delta$ и $\|u(t)h - hu(t)\| < 6 \sqrt[4]{\delta}$. Но тогда существует унитарный путь $u'(t)$, такой, что $\|u'(t) - u(t)\| < 56 \|h\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}$. При этом вдоль этого пути выполняется требуемая оценка

$$\|u'(t)h - hu'(t)\| \leq \|u(t)h - hu(t)\| + 2 \|h\| \|u'(t) - u(t)\| < C \sqrt[4]{\delta}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Тем же способом можно доказать аналогичный результат в случае, когда вместо самосопряженного оператора h рассматривается унитарный оператор v , имеющий в спектре лауну фиксированной длины.

Автор благодарен А. С. Мищенко и Е. В. Троицкому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brown L. G., Pedersen G. K. J. Funct. Anal., **99**, 131–149 (1991).
2. Exel R., Loring T. A. J. Funct. Anal., **95**, 364–376 (1991).
3. Rieffel M. A. J. Operator Theory, **17**, 237–254 (1987).
4. Voiculescu D. Acta Sci. Math. (Szeged), **45**, 429–431 (1983).

Московский государственный
университет

Поступило в редакцию
7 мая 1996 г.

УДК 517.164.152

Критические точки произвольных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ *

© 1997. М. А. Панков, Е. А. Полулях

1. Введение. В работах М. Гусмана [1, 2] можно найти следующее определение критической точки произвольного отображения $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *критической* (в смысле Гусмана) точкой отображения f , если существует система n -мерных кубов $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ с центрами в точке x , диаметры которых стремятся к 0 при $i \rightarrow \infty$, и таких, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\text{mes } f(K_i)}{\text{mes } K_i} = 0.$$

Здесь и далее mes — внешняя мера Лебега (напомним, что внешняя мера определена для произвольного подмножества пространства $\mathbb{R}^n$). Несложно показать корректность данного определения, т.е. если $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, то точка x принадлежит $\Sigma(f)$ тогда и только тогда, когда она является критической точкой в

* Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда Дж. Сороса (грант U6F200).

смысле Гусмана. Основным результатом статьи [2] является следующий аналог теоремы Сарда: *мера образа всех критических точек произвольного отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ равна нулю.*

В настоящей работе развивается эта идея М. Гусмана. Дается определение критической и слабо критической точек произвольного отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, доказан аналог теоремы А. Сарда, введены и исследованы некоторые числовые характеристики критических и слабо критических точек. В разд. 7 наше определение обобщается на случай отображения X в Y , где X и Y — метрические пространства с конечной размерностью Хаусдорфа–Безиковича. Данное обобщение может быть использовано в современной теории фракталов.

Авторы выражают глубокую признательность В. В. Шарко за интерес, проявленный к работе, и ряд ценных замечаний, а также благодарят А. С. Грецкого, ознакомившего их с результатами М. Гусмана.

2. Определение критической и слабо критической точек. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — произвольное отображение. Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *слабо критической* точкой отображения f , если

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{mes } f(V_r(x))}{(\text{mes } V_r(x))^{m/n}} = 0.$$

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *критической* для отображения f , если

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{mes } f(V_r(x))}{(\text{mes } V_r(x))^{m/n}} = 0.$$

Здесь $V_r(x)$ — шар радиуса r с центром в точке x . Совокупность всех критических точек отображения f обозначим через $G(f)$, а всех слабо критических — через $g(f)$. Очевидно, что $G(f) \subset g(f)$. Ниже будет доказано, что в общем случае обратное включение уже неверно. Однако имеет место следующее

Предложение 1. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Тогда $g(f) = G(f) = \Sigma(f)$.

Здесь $\Sigma(f)$ — множество всех критических точек отображения f (в обычном смысле).

Покажем, что существует отображение $f: [-c, c] \rightarrow [-c, c]$, удовлетворяющее условию Липшица и такое, что $G(f) \neq g(f)$. Возьмем константу c , $0 < c < 1$. Положим для $x \in [-c, c]$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - c^{2^k}, & \text{если } x \in (\frac{1}{2}(c^{2^k} + c^{2^{k+1}}), c^{2^k}], \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ c^{2^{k+1}}, & \text{если } x \in (c^{2^{k+1}}, \frac{1}{2}(c^{2^k} + c^{2^{k+1}})], \quad k \in \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

и $f(-x) = f(x)$, $f(0) = 0$. Для системы интервалов $\{U_i^1\}_{i=1}^\infty$, $U_i^1 = (-c^{2^i}, c^{2^i})$, предел $\lim_{i \rightarrow \infty} (\text{mes } f(U_i^1) / \text{mes } U_i^1)$ равен единице. Однако для системы $\{U_i^2\}_{i=1}^\infty$, $U_i^2 = (-\frac{1}{2}(c^{2^i} + c^{2^{i+1}}), \frac{1}{2}(c^{2^i} + c^{2^{i+1}}))$, такой предел равен нулю. Следовательно, $0 \in g(f) \setminus G(f)$.

3. Критические точки и регулярно сжимающиеся системы множеств. Пусть $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^\infty$ — счетная система подмножеств в $\mathbb{R}^n$, содержащих точку x и таких, что $\text{diam}(U_i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Обозначим через R_i и r_i радиус наименьшего шара с центром в точке x , содержащего множество U_i , и радиус наибольшего шара с центром в точке x , содержащегося в множестве U_i . Очевидно, что $R_i \geq r_i$. Система $\mathcal{U}$ называется *регулярно сжимающейся*, если

$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} (R_i/r_i) < \infty$. В противном случае будем говорить, что система $\mathcal{U}$ является *нерегулярно сжимающейся*.

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — произвольное отображение. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $x \in G(f)$;
- (ii) для любой регулярно сжимающейся системы $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^\infty$ подмножеств, содержащих точку x ,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\text{mes } f(U_i)}{(\text{mes } U_i)^{m/n}} = 0. \quad (1)$$

Нечто подобное имеет место и для слабо критических точек. Пусть f то же, что и в теореме 1, и найдется регулярно сжимающаяся относительно точки $x \in \mathbb{R}^n$ система $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^\infty$, такая, что имеет место (1). Тогда $x \in g(f)$.

Утверждение, аналогичное теореме 1, для нерегулярно сжимающихся систем подмножеств уже не имеет места. Рассмотрим отображение $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^n + x^{3/2}$, $n > 3/2$. Очевидно, что $(0, 0)$ — критическая точка отображения f . Рассмотрим куб $I_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1/i, |y| \leq 1/i^2\}$. Система $\{I_i\}_{i=1}^\infty$ является нерегулярно сжимающейся, и нужный нам предел не равен нулю.

4. Порядок критической и слабо критической точек. Рассмотрим произвольное отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, и пусть $x \in G(f)$. Число

$$\alpha = \sup \left\{ \gamma : \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{mes } f(V_r(x))}{(\text{mes } V_r(x))^{(m+\gamma)/n}} = 0 \right\} \quad (2)$$

называется *порядком* критической точки x .

Пусть $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^\infty$ — нерегулярно сжимающаяся система подмножеств в $\mathbb{R}^n$. Число $\beta = \inf \{ \delta : \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} (R_i^{1+\delta}/r_i) < \infty \}$ называется *порядком* нерегулярно сжимающейся системы $\mathcal{U}$. Следует отметить, что существуют нерегулярно сжимающиеся системы нулевого порядка.

Связь между введенными нами понятиями выражает

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — произвольное отображение. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) x — критическая точка порядка α ;
- (ii) для любой нерегулярно сжимающейся системы $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^\infty$ порядка меньше α/t имеет место равенство (1).

Если в утверждении (i) порядок α является точной верхней гранью, то можно считать, что в утверждении (ii) порядок системы $\mathcal{U}$ не больше α/t .

Аналогичным образом вводится порядок слабо критической точки. Заменив в (2) предел на нижний предел, получим порядок слабо критической точки $x \in g(f)$. Имеет место следующий аналог теоремы 2: если существует нерегулярно сжимающаяся система $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^\infty$ подмножеств, содержащих точку x , порядка α/t , для которой имеет место равенство (1), то $x \in g(f)$ и порядок слабо критической точки x не меньше α .

5. Замкнутость множеств $G(f)$ и $g(f)$. В общем случае множество $G(f)$ может быть незамкнутым, даже когда f почти всюду дифференцируемо (см. пример в конце разд. 2). Изучению данного вопроса будет посвящена отдельная работа.

6. Аналог теоремы Сарда. Обозначим через $g_\alpha(f)$ совокупность всех слабо критических точек отображения f , порядок которых больше α . Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ произвольно и $r = \max(0; n - m)$. Тогда $\text{mes } f(g_r(f)) = 0$.

Из теоремы 3 немедленно вытекает, что если $n \leq m$, то $\text{mes } f(g(f)) = 0$. Следует отметить, что при $n = m$ эта теорема была доказана в [1, 2]. При $n > m$ аналогичное утверждение уже неверно. Известен пример отображения $f \in C^{n-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, такого, что $\text{mes } f(\Sigma(f)) > 0$.

7. Обобщение на случай метрических пространств. Пусть X и Y — метрические пространства, а $\alpha(X)$ и $\alpha(Y)$ — их размерности Хаусдорфа–Безиковича. Пусть $\alpha(X), \alpha(Y) < \infty$ и пространства X, Y однородны в том смысле, что в произвольной точке локальная размерность Хаусдорфа–Безиковича совпадает с глобальной. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — произвольное отображение. Точка $x \in X$ называется *критической* для отображения f ($x \in G(f)$), если

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{mes}_{\alpha(Y)} f(B_r(x))}{(\text{mes}_{\alpha(X)} B_r(x))^{\alpha(Y)/\alpha(X)}} = 0.$$

Слабо критические точки отображения f определяются аналогично.

Результаты разд. 2–6 переносятся на данный случай, если дополнительно потребовать, чтобы верхняя и нижняя плотности в каждой точке пространства X (см. [3]) были отличны от 0 и ∞ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусман М. Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. Мир, М., 1978. **2.** de Guzman M. Bol. Soc. Brasil. Mat., **3**, 133–136 (1972). **3.** Иванов Л. Д. Вариации множеств и функций. Наука, М., 1975.

Институт математики
НАН Украины (Киев)

Поступило в редакцию
10 апреля 1996 г.
В переработанном виде
10 ноября 1996 г.

УДК 517.51

Ядерность операторов вложения классов Соболева в весовые пространства*

© 1997. О. Г. ПАРФЕНОВ

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Обозначим через d_x расстояние от точки x до границы области Ω :

$$d_x = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|;$$

если $\Omega = \mathbb{R}^m$, положим $d_x = 1 + |x|$. Определим класс $\overset{\circ}{W}_{p,\lambda}^l(\Omega)$, следуя работе [1]

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ.