Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Г. Парфенов, Ядерность операторов вложения классов Соболева в весовые пространства, *Функци. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 3, 85–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:14:07

6. Аналог теоремы Сарда. Обозначим через $g_\alpha(f)$ совокупность всех слабо критических точек отображения f , порядок которых больше α . Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ произвольно и $r = \max(0; n - m)$. Тогда $\text{mes } f(g_r(f)) = 0$.

Из теоремы 3 немедленно вытекает, что если $n \leq m$, то $\text{mes } f(g(f)) = 0$. Следует отметить, что при $n = m$ эта теорема была доказана в [1, 2]. При $n > m$ аналогичное утверждение уже неверно. Известен пример отображения $f \in C^{n-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, такого, что $\text{mes } f(\Sigma(f)) > 0$.

7. Обобщение на случай метрических пространств. Пусть X и Y — метрические пространства, а $\alpha(X)$ и $\alpha(Y)$ — их размерности Хаусдорфа–Безиковича. Пусть $\alpha(X), \alpha(Y) < \infty$ и пространства X, Y однородны в том смысле, что в произвольной точке локальная размерность Хаусдорфа–Безиковича совпадает с глобальной. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — произвольное отображение. Точка $x \in X$ называется *критической* для отображения f ($x \in G(f)$), если

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{mes}_{\alpha(Y)} f(B_r(x))}{(\text{mes}_{\alpha(X)} B_r(x))^{\alpha(Y)/\alpha(X)}} = 0.$$

Слабо критические точки отображения f определяются аналогично.

Результаты разд. 2–6 переносятся на данный случай, если дополнительно потребовать, чтобы верхняя и нижняя плотности в каждой точке пространства X (см. [3]) были отличны от 0 и ∞ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусман М. Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. Мир, М., 1978. **2.** de Guzman M. Bol. Soc. Brasil. Mat., **3**, 133–136 (1972). **3.** Иванов Л. Д. Вариации множеств и функций. Наука, М., 1975.

Институт математики
НАН Украины (Киев)

Поступило в редакцию
10 апреля 1996 г.
В переработанном виде
10 ноября 1996 г.

УДК 517.51

Ядерность операторов вложения классов Соболева в весовые пространства*

© 1997. О. Г. ПАРФЕНОВ

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Обозначим через d_x расстояние от точки x до границы области Ω :

$$d_x = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|;$$

если $\Omega = \mathbb{R}^m$, положим $d_x = 1 + |x|$. Определим класс $\mathring{W}_{p,\lambda}^l(\Omega)$, следуя работе [1]

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ.

В. Л. Олейника и Б. С. Павлова, как замыкание пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|f\|_{\mathring{W}_{p,\lambda}^l(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{|\beta|=l} |D^\beta f|^p d_x^{-\lambda} + |f|^p d_x^{-pl-\lambda} \right) dx \right)^{1/p}; \quad (1)$$

здесь $l = 1, 2, \dots$, $1 \leq p < \infty$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$. При $p = \infty$ производится обычная модификация. Определим также классы $\mathring{L}_{p,\lambda}^l(\Omega)$ как замыкание пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|f\|_{\mathring{L}_{p,\lambda}^l(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{|\beta|=l} |D^\beta f|^p d_x^{-\lambda} \right) dx \right)^{1/p}. \quad (2)$$

При $\lambda \geq 0$ нормы (1), (2) эквивалентны (см. [1]). При $\lambda = 0$, таким образом, мы рассматриваем обычный класс Соболева $\mathring{W}_p^l(\Omega)$.

Для классов $\mathring{W}_{p,\lambda}^l(\Omega)$ в работе [1] получена теорема вложения в пространство $L_q(\Omega, \mu)$ при условии, что $pl > t$. Подчеркнем, что μ — произвольная борелевская мера в Ω . Чтобы сформулировать теорему вложения, рассмотрим конечнократное покрытие области Ω шарами:

$$\Omega = \bigcup_n B_n, \quad B_n = \{y : |y - x_n| < r_n\},$$

причем $r_n = (1/4) d_{x_n}$. Такое покрытие называется покрытием типа Уитни. Вместо $1/4$ можно взять любое число γ , $0 < \gamma < 1$. Далее определим последовательность

$$\beta_n = r_n^{(pl+\lambda-m)/p} (\mu(B_n))^{1/q}. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 1 [1]. Пусть $pl > t$. Тогда

(а) если $1 \leq q \leq p$, то оператор вложения J класса $\mathring{W}_{p,\lambda}^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega, \mu)$ ограничен в том и только том случае, когда

$$\sup_n \beta_n < \infty; \quad (4)$$

(б) если $1 \leq p < q \leq \infty$, то оператор вложения J ограничен в том и только том случае, когда

$$\sum_n \beta_n^r < \infty, \quad r^{-1} = p^{-1} - q^{-1}. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. По теореме вложения Соболева условие $pl > t$ есть критерий ограниченности вложения пространства $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ в $C(\Omega)$, и, как нетрудно заметить, то же верно для классов $\mathring{W}_{p,\lambda}^l$. Таким образом, в теореме 1 содержателен лишь вопрос о поведении меры μ вблизи границы множества Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При условии, что $pl \leq t$, критерий ограниченности вложения $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega, \mu)$ (для любой борелевской меры μ !) был получен В. Г. Мазьей (см. [2, §§ 1.1, 1.2]) в терминах емкости и усовершенствован в работе Сойера [3].

В данной работе мы рассматриваем вопрос о ядерности оператора вложения $J: \mathring{W}_{p,\lambda}^l(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega, \mu)$, предполагая сразу, что оператор вложения

$$J_0: \mathring{W}_p^l(Q^m) \rightarrow C(Q^m)$$

(Q^m — это m -мерный куб) является ядерным.

Напомним определение ядерности. Пусть X, Y — банаховы пространства, и X^*, Y^* — их сопряженные. Линейный оператор T из X в Y называется ядерным, если его можно представить в виде

$$T = \sum_n \langle \cdot, x'_n \rangle y_n, \quad x'_n \in X^*, y_n \in Y, \quad (6)$$

причем

$$\sum_n \|x'_n\|_X \|y_n\|_Y < \infty. \quad (7)$$

Точная нижняя граница сумм (7) по представлениям вида (6) называется ядерной нормой оператора и обозначается $N(T)$. Эквивалентные определения и свойства этого класса операторов, а также его значимость для теории и приложений см. в монографии А. Пича [4].

Сформулируем основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть J — оператор вложения класса $\mathring{W}_{p,\lambda}^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega, \mu)$ и выполнено условие $l > t$. Тогда

(а) если $1 \leq q \leq p \leq \infty$, то J является ядерным в том и только том случае, когда

$$\sum_n \beta_n < \infty; \quad (8)$$

(б) если $1 \leq p < q \leq \infty$, то J является ядерным в том и только том случае, когда

$$\sum_n \beta_n^s < \infty, \quad s^{-1} = 1 - p^{-1} + q^{-1}. \quad (9)$$

В доказательстве теоремы 2 существенно используется методика работы автора [5].

Поясним основные идеи доказательства. Напомним сначала теорему Тонга о ядерности диагональных операторов. Пусть T — оператор из l^p в l^q вида

$$T(\{x_n\}_1^\infty) = \{\sigma_n x_n\}_1^\infty, \quad \sigma_n > 0. \quad (10)$$

Тогда T называется диагональным оператором с диагональю $\{\sigma_n\}_1^\infty$.

ТЕОРЕМА 3 [6]. Если $1 \leq q \leq p \leq \infty$, то оператор T вида (10) является ядерным тогда и только тогда, когда

$$A_1(\sigma) = \sum_n \sigma_n < \infty;$$

при этом $N(T) = A_1(\sigma)$. Если $1 \leq p < q \leq \infty$, то оператор T вида (10) является ядерным тогда и только тогда, когда

$$A_2(\sigma) = \sum_n \sigma_n^s < \infty, \quad s^{-1} = 1 - p^{-1} + q^{-1};$$

при этом $N(T) = A_2(\sigma)^{1/s}$.

Начнем с необходимости в теореме 2. Пусть $f_0(x)$ — произвольная функция из $\mathring{W}_{p,\lambda}^l(B_1)$, $\|f_0\| \neq 0$. Положим

$$f_n(x) = f_0((x - x_n + x_1)r_1/r_n), \quad n = 2, \dots.$$

Очевидно, что $f \in \mathring{W}_{p,\lambda}^l(B_n)$. Рассмотрим подпространство $L \subset \mathring{W}_{p,\lambda}^l(\Omega)$, являющееся замыканием линейной оболочки $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ и сужение оператора J на это подпространство. Положим $J|_L = T$. Имеем $N(J) \geq N(T)$. Оператор T является диагональным оператором из l^p в l^q с диагональю $\{c_0\beta_n\}_{n=1}^\infty$:

$$c_0 = \|f_1\|_{W_{p,\lambda}^1(B_1)} / \|f_1\|_{L_q(B_1, \mu)}.$$

Применяя теорему Тонга, получим теорему 2 в части необходимости.

В доказательстве теоремы 2 в части достаточности оператор вложения представляем как векторный диагональный оператор, опираясь на покрытие области Ω шарами типа Уитни. Далее применяется обобщение теоремы Тонга на векторные диагональные операторы, полученное в работе [7].

Автор благодарит М. Ш. Бирмана, С. В. Кислякова, В. М. Тихомирова и участников его семинара за интерес к данной работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Олейник В. Л., Павлов Б. С. О критериях ограниченности и полной непрерывности некоторых операторов вложения. В сб.: Проблемы математической физики, вып. 4, изд-во ЛГУ, 1970, с. 112–118.
2. Мазья В. Г., Шапошникова Т. О. Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. Изд-во ЛГУ, Л-д, 1986.
3. Sawyer E. Ind. Univ. Math. J., **33**, No. 3, 353–366 (1984).
4. Пич А. Операторные идеалы. М., Мир, 1982.
5. Parfenov O. G. Math. Nachr., **154**, 105–115 (1991).
6. Tong A. Trans. Amer. Math. Soc., **143**, 233–247 (1969).
7. Глускин Е. Д., Кисляков С. В., Рейнов О. И. Зап. научн. сем. ЛОМИ, **92**, 85–102 (1979).

Псковский государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
27 марта 1996 г.

УДК 517.98

Инъективные вещественные W^* -факторы типа Π_λ , $0 < \lambda < 1$

© 1997. А. А. РАХИМОВ

Классические работы Конна [1] о классификации факторов и их автоморфизмов, в частности полная классификация инъективных факторов, сыграли значимую роль в развитии теории операторных алгебр. Для вещественных факторов аналог классификации Конна был получен в работах [2, 3]. Оказывается, что для вещественных факторов типа Π_1 , Π_∞ или Π_1 результаты полностью аналогичны комплексному случаю. Но если вещественный фактор имеет тип Π_λ , $0 < \lambda < 1$, то в отличие от случая комплексных факторов имеются ровно две