Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Рахимов, Инъективные вещественные W^* -факторы типа III_λ , $0 < \lambda < 1$, *Функци. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 3, 88–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa485>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:46:17

при этом $N(T) = A_2(\sigma)^{1/s}$.

Начнем с необходимости в теореме 2. Пусть $f_0(x)$ — произвольная функция из $\mathring{W}_{p,\lambda}^l(B_1)$, $\|f_0\| \neq 0$. Положим

$$f_n(x) = f_0((x - x_n + x_1)r_1/r_n), \quad n = 2, \dots$$

Очевидно, что $f \in \mathring{W}_{p,\lambda}^l(B_n)$. Рассмотрим подпространство $L \subset \mathring{W}_{p,\lambda}^l(\Omega)$, являющееся замыканием линейной оболочки $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ и сужение оператора J на это подпространство. Положим $J|_L = T$. Имеем $N(J) \geq N(T)$. Оператор T является диагональным оператором из l^p в l^q с диагональю $\{c_0\beta_n\}_{n=1}^\infty$:

$$c_0 = \|f_1\|_{W_{p,\lambda}^1(B_1)} / \|f_1\|_{L_q(B_1, \mu)}.$$

Применяя теорему Тонга, получим теорему 2 в части необходимости.

В доказательстве теоремы 2 в части достаточности оператор вложения представляем как векторный диагональный оператор, опираясь на покрытие области Ω шарами типа Уитни. Далее применяется обобщение теоремы Тонга на векторные диагональные операторы, полученное в работе [7].

Автор благодарит М. Ш. Бирмана, С. В. Кислякова, В. М. Тихомирова и участников его семинара за интерес к данной работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Олейник В. Л., Павлов Б. С. О критериях ограниченности и полной непрерывности некоторых операторов вложения. В сб.: Проблемы математической физики, вып. 4, изд-во ЛГУ, 1970, с. 112–118.
2. Мазья В. Г., Шапошникова Т. О. Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. Изд-во ЛГУ, Л-д, 1986.
3. Sawyer E. Ind. Univ. Math. J., **33**, No. 3, 353–366 (1984).
4. Пич А. Операторные идеалы. М., Мир, 1982.
5. Parfenov O. G. Math. Nachr., **154**, 105–115 (1991).
6. Tong A. Trans. Amer. Math. Soc., **143**, 233–247 (1969).
7. Глускин Е. Д., Кисляков С. В., Рейнов О. И. Зап. научн. сем. ЛОМИ, **92**, 85–102 (1979).

Псковский государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
27 марта 1996 г.

УДК 517.98

Инъективные вещественные W^* -факторы типа Π_λ , $0 < \lambda < 1$

© 1997. А. А. РАХИМОВ

Классические работы Конна [1] о классификации факторов и их автоморфизмов, в частности полная классификация инъективных факторов, сыграли значимую роль в развитии теории операторных алгебр. Для вещественных факторов аналог классификации Конна был получен в работах [2, 3]. Оказывается, что для вещественных факторов типа Π_1 , Π_∞ или Π_1 результаты полностью аналогичны комплексному случаю. Но если вещественный фактор имеет тип Π_λ , $0 < \lambda < 1$, то в отличие от случая комплексных факторов имеются ровно две

конструкции скрещенного произведения алгебры на ее автоморфизм. В [2] было показано, что структура вещественного фактора R типа III_λ , $0 < \lambda < 1$, определяется либо парой (Q, θ) , где Q — вещественный фактор типа II_∞ , а θ — его $*$ -автоморфизм с $\text{mod}(\theta) = \lambda$, либо парой (N, β) , где N — фактор типа II_∞ , а β — его $*$ -антиавтоморфизм с $\text{mod}(\beta) = \sqrt{\lambda}$ (в смысле [4]). Отсюда следует, что существуют два неизоморфных вещественных инъективных W^* -фактора типа III_λ , $0 < \lambda < 1$ (см. [4, 5]).

Как известно, всякая вещественная W^* -алгебра порождается инволютивным $*$ -антиавтоморфизмом на обертывающей W^* -алгебре, единственным с точностью до сопряжения (см., например, [5, теорема 3.1]). В работе Джордано [4] было показано, что на комплексном инъективном факторе типа III_λ , $\lambda \in (0, 1)$, существуют два различных класса инволютивных $*$ -автоморфизмов. А именно, мы видим, что если вещественный фактор порожден парой (Q, β) , то для соответствующего ему инволютивного $*$ -антиавтоморфизма α имеет место равенство $\text{mod}(\alpha) = 1$ (в смысле [4]), а если вещественный фактор порожден парой (N, β) , то $\text{mod}(\alpha) = \sqrt{\lambda}$ (см. [2]).

В данной работе исследуются эти два класса неизоморфных вещественных инъективных факторов типа III_λ , $0 < \lambda < 1$. Показано, что в одном классе находятся гиперфинитные вещественные факторы, а во втором классе — инъективные, но не гиперфинитные. Отсюда вытекает, что для вещественных алгебр понятия гиперфинитности и инъективности, вообще говоря, неэквивалентны, в то время как в комплексном случае эти понятия совпадают, что развивает основополагающие результаты Стейси и Джордано, существенно использованные в данной работе.

1. Предварительные сведения. Пусть $B(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов на комплексном гильбертовом пространстве H . Вещественная $*$ -подалгебра R с единицей $\mathbb{I}$ в $B(H)$ называется вещественной W^* -алгеброй, если она замкнута в слабой операторной топологии и $R \cap iR = \{0\}$. W^* -алгебра N (соответственно вещественная W^* -алгебра R) называется фактором (соответственно вещественным фактором), если в ее центре $Z(N)$ (соответственно $Z(R)$) лежат только элементы вида $\{\lambda \mathbb{I}\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (соответственно $\lambda \in \mathbb{R}$). Скажем, что вещественная W^* -алгебра R имеет тип I_{fin} , I_∞ , II_1 , II_∞ , III_λ ($0 \leq \lambda \leq 1$), если обертывающая W^* -алгебра $\mathcal{U}(R)$ имеет соответствующий тип в обычной классификации W^* -алгебр. Линейное отображение α алгебры M в себя называется $*$ -автоморфизмом (соответственно $*$ -антиавтоморфизмом), если $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ и $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ (соответственно $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$) для всех $x, y \in M$. Отображение α называется инволютивным, если $\alpha(\alpha(x)) = x$ для всех $x \in M$. Два отображения α и β называются сопряженными, если $\alpha = \theta \cdot \beta \cdot \theta^{-1}$ для некоторого автоморфизма θ алгебры M . Все остальные используемые определения и результаты см. в [1, 4–6].

2. Вещественные гиперфинитные и инъективные факторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [6]. Вещественный фактор R называется *гиперфинитным*, если существует возрастающая последовательность $\{R_n\}$ его конечномерных подалгебр, такая, что $\mathbb{I} \in R_n$ и $\bigcup_{n \geq 1} R_n$ слабо плотно в R .

Пусть $\|x\|_\psi^\# = \psi((x^*x + xx^*)/2)^{1/2}$ — полунорма, порожденная нормальным состоянием ψ . Легко видеть, что для любого унитарного $u \in R$ имеем $\|u\|_\psi^\# = 1$ и что последовательность $\{x_n\}$ в R σ -сильно сходится к элементу x тогда и

только тогда, когда $\lim_n \|x_n - x\|_\psi^\# = 0$. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть R — вещественный фактор типа III_λ , $0 < \lambda < 1$. Следующие условия эквивалентны:

- (1) R — гиперфинитный фактор;
- (2) R счетно порожден и для набора $x_1, \dots, x_n$ элементов из R , для любого нормального состояния ψ в R и любого $\varepsilon > 0$ существуют конечномерная подалгебра B алгебры R и набор $y_1, \dots, y_n$ элементов из B , такие, что $\|y_k - x_k\|_\psi^\# \leq \varepsilon$, $k = 1, \dots, n$;
- (3) существует возрастающая последовательность $\{R_n\}$ подалгебр алгебры R , изоморфных алгебре $2^n \times 2^n$ -вещественных матриц, такая, что $\mathbb{I} \in R_n$ и $\bigcup_{n \geq 1} R_n$ слабо плотно в R .

Доказательство импликаций (1) $\Rightarrow$ (2), (3) $\Rightarrow$ (1) очевидно. Доказательство импликации (2) $\Rightarrow$ (3) проводится аналогично доказательству теоремы 3 из [7]. Покажем, что конечномерный подфактор B , а следовательно, и подфакторы $\{R_n\}$ можно выбрать так, чтобы они являлись вещественными матричными алгебрами. Действительно, очевидно, что вещественный подфактор B в R изоморфен обратимому вещественному фактору, действующему на 2^m -мерном комплексном гильбертовом пространстве для некоторого m . Если B не изоморфен алгебре $2^m \times 2^m$ -вещественных матриц, то дважды применяя лемму 1.2 из [6] к $B' = B \cap R$, мы находим вещественный подфактор R_4 в B' , такой, что $R_4 \cong M_4(\mathbb{R})$. Тогда по следствию 2.3 из [6] имеем $R_4 = Q \otimes Q$, где Q — тело кватернионов, представляемое как алгебра комплексных 2×2 -матриц. Если положить $\mathcal{B} = B \otimes Q \subset R$, то опять по следствию 2.3 из [6] $\mathcal{B}$ изоморфно алгебре вещественных $2^k \times 2^k$ -матриц для некоторого k .

Заметим, что если вещественная W^* -алгебра R конечна, то этот результат доказан в работе [6].

Напомним [5], что всякая непрерывная вещественная W^* -алгебра R порождается некоторым единственным инволютивным $*$ -антиавтоморфизмом α обертывающей W^* -алгебры $\mathcal{U}(R)$ и $R = \{x \in \mathcal{U}(R) : \alpha(x) = x^*\}$. Используя теорему 1, аналогично следствию 2.10 из [6] докажем такую теорему:

ТЕОРЕМА 2. Пусть M есть W^* -фактор типа III_λ , $0 < \lambda < 1$. Тогда класс инволютивных $*$ -антиавтоморфизмов, порождающих гиперфинитные вещественные факторы, единствен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α — инволютивный $*$ -антиавтоморфизм в M , и пусть $R = \{x \in M : \alpha(x) = x^*\}$ — вещественный фактор, порожденный α , который по условию теоремы является гиперфинитным. По теореме 1 существует возрастающая последовательность $\{R_n\}$ подалгебр алгебры R , изоморфных алгебрам $2^n \times 2^n$ -вещественных матриц, такая, что $\mathbb{I} \in R_n$ и $\bigcup_{n \geq 1} R_n$ слабо плотно в R . Пусть $M_n = R_n + iR_n$ — фактор типа I_{2^n} . Если через t_n мы обозначим транспозицию на M_n , которая является инволютивным $*$ -антиавтоморфизмом этого фактора, то $R_n = \{x \in M_n : t_n(x) = x^*\}$, а следовательно, $\alpha(x) = t_n(x)$ для всех $x \in M_n$. Таким образом, всякий $*$ -антиавтоморфизм α является индуктивным пределом таких отображений. Поскольку любые инволютивные $*$ -антиавтоморфизмы суть пределы таких отображений, то они сопряжены в $\bigcup_{n \geq 1} M_n$. Так как каждый автоморфизм объединения $\bigcup_{n \geq 1} M_n$ сходится к единственному автоморфизму в M , то они будут сопряженными и в M . Теорема доказана.

Напомним [1], что W^* -алгебра M в $B(H)$ называется инъективной, если существует проектор P , отображающий $B(H)$ на M , такой, что $P(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ и $\|P\| = 1$. Вещественная алгебра R называется *инъективной*, если обертывающая алгебра $\mathcal{U}(R)$ является инъективной (см. [5]). Пусть α — инволютивный $*$ -антиавтоморфизм W^* -алгебры M . Под *модулем* отображения α понимается положительное вещественное число μ , такое, что $\tau \cdot \alpha = \mu \cdot \tau$ (обозначение: $\mu = \text{mod}(\alpha)$), где τ — полуконечный след на M . Как известно [4], существуют два класса неизоморфных вещественных инъективных факторов типа III_λ , $0 < \lambda < 1$, комплексно порождающих изоморфные факторы типа III_λ . Один из них порождается инволютивным $*$ -антиавтоморфизмом с $\text{mod}(\alpha) = 1$, а другой порождается инволютивным $*$ -антиавтоморфизмом с $\text{mod}(\alpha) = \sqrt{\lambda}$. Поскольку легко построить вещественный гиперфинитный фактор R типа III_λ , $0 < \lambda < 1$, с $\text{mod}(\alpha) = 1$ (например, вещественный фактор Пауэрса, т. е. бесконечное тензорное произведение 2×2 -вещественных матриц), из теоремы 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Вещественный инъективный W^* -фактор R типа III_λ , $0 < \lambda < 1$, является гиперфинитным тогда и только тогда, когда $\text{mod}(\alpha) = 1$.*

Отсюда вытекает, что во втором классе содержатся инъективные, но не гиперфинитные вещественные факторы типа III_λ , $0 < \lambda < 1$, т. е. имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для вещественных факторов понятия инъективности и гиперфинитности неэквивалентны.*

Напомним [1], что в комплексном случае эти понятия совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Connes A. Ann. Math., **104**, No. 1, 73–115 (1976).
2. Stacey P. London Math. Soc. (3), **47**, 275–284 (1983).
3. Рахимов А. А., Усманов Ш. М. Функц. анализ и его прил., **29**, вып. 1, 87–89 (1995).
4. Giordano T. J. Funct. Anal., **51**, No. 3, 326–360 (1983).
5. Аюнов Ш. А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Изд-во «ФАН», Ташкент, 1986.
6. Stormer E. Duke Math. J., **47**, No. 1, 145–153 (1980).
7. Elliott G. A., Woods E. J. Proc. Am. Math. Soc., **60**, 175–179 (1976).

Университет Мировой Экономики и Дипломатии,
Республика Узбекистан, г. Ташкент
e-mail: root@im.tashkent.su

Поступило в редакцию
16 апреля 1996 г.

УДК 517

Факторизация вполне положительных коциклов и ГНС-конструкция представлений в пространствах Понтрягина

© 1997. В. С. ШУЛЬМАН

Пространство Понтрягина Π_k — это линейное пространство H с индефинитным скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$, допускающее разложение в сумму двух J -ортогональных (символ J перед термином означает, что в его определении