Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Шульман, Факторизация вполне положительных коциклов и ГНС-конструкция представлений в пространствах Понтрягина, *Функци. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 3, 91–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa486>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 05:55:23

Напомним [1], что W^* -алгебра M в $B(H)$ называется инъективной, если существует проектор P , отображающий $B(H)$ на M , такой, что $P(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ и $\|P\| = 1$. Вещественная алгебра R называется *инъективной*, если обертывающая алгебра $\mathcal{U}(R)$ является инъективной (см. [5]). Пусть α — инволютивный $*$ -антиавтоморфизм W^* -алгебры M . Под *модулем* отображения α понимается положительное вещественное число μ , такое, что $\tau \cdot \alpha = \mu \cdot \tau$ (обозначение: $\mu = \text{mod}(\alpha)$), где τ — полуконечный след на M . Как известно [4], существуют два класса неизоморфных вещественных инъективных факторов типа III_λ , $0 < \lambda < 1$, комплексно порождающих изоморфные факторы типа III_λ . Один из них порождается инволютивным $*$ -антиавтоморфизмом с $\text{mod}(\alpha) = 1$, а другой порождается инволютивным $*$ -антиавтоморфизмом с $\text{mod}(\alpha) = \sqrt{\lambda}$. Поскольку легко построить вещественный гиперфинитный фактор R типа III_λ , $0 < \lambda < 1$, с $\text{mod}(\alpha) = 1$ (например, вещественный фактор Пауэрса, т. е. бесконечное тензорное произведение 2×2 -вещественных матриц), из теоремы 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Вещественный инъективный W^* -фактор R типа III_λ , $0 < \lambda < 1$, является гиперфинитным тогда и только тогда, когда $\text{mod}(\alpha) = 1$.*

Отсюда вытекает, что во втором классе содержатся инъективные, но не гиперфинитные вещественные факторы типа III_λ , $0 < \lambda < 1$, т. е. имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для вещественных факторов понятия инъективности и гиперфинитности неэквивалентны.*

Напомним [1], что в комплексном случае эти понятия совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Connes A. Ann. Math., **104**, No. 1, 73–115 (1976).
2. Stacey P. London Math. Soc. (3), **47**, 275–284 (1983).
3. Рахимов А. А., Усманов Ш. М. Функц. анализ и его прил., **29**, вып. 1, 87–89 (1995).
4. Giordano T. J. Funct. Anal., **51**, No. 3, 326–360 (1983).
5. Аюнов Ш. А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Изд-во «ФАН», Ташкент, 1986.
6. Stormer E. Duke Math. J., **47**, No. 1, 145–153 (1980).
7. Elliott G. A., Woods E. J. Proc. Am. Math. Soc., **60**, 175–179 (1976).

Университет Мировой Экономики и Дипломатии,
Республика Узбекистан, г. Ташкент
e-mail: root@im.tashkent.su

Поступило в редакцию
16 апреля 1996 г.

УДК 517

Факторизация вполне положительных коциклов и ГНС-конструкция представлений в пространствах Понтрягина

© 1997. В. С. ШУЛЬМАН

Пространство Понтрягина Π_k — это линейное пространство H с индефинитным скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$, допускающее разложение в сумму двух J -ортогональных (символ J перед термином означает, что в его определении

$[\cdot, \cdot]$ играет ту же роль, какую обычно играет скалярное произведение) подпространств, одно из которых k -мерно и отрицательно ($[x, x] < 0$ при $x \neq 0$), а другое положительно и полно относительно нормы $[x, x]^{1/2}$. В алгебре $\mathcal{B}(H)$ всех непрерывных линейных операторов в H вводится инволюция $A \rightarrow A^\#$ (переход к J -сопряженному оператору). В ряде задач (классификация элементарных представлений полупростых групп, ортогонализация представлений инволютивных алгебр, построение моделей алгебраической теории поля) возникают вопросы классификации J -унитарных представлений групп и J -симметричных представлений $*$ -алгебр в Π_k . Изучению этих вопросов посвящены, в частности, работы [1–7]. Известно [6, 7], что J -симметричные представления C^* -алгебр в Π_k и групповых алгебр в Π_1 подобны $*$ -представлениям в гильбертовом пространстве. В [5] показано, что столь же просто описываются невырожденные (не имеющие нейтральных инвариантных подпространств) представления почти эрмитовых $*$ -алгебр, т. е. алгебр, у которых самосопряженные элементы с вещественным спектром плотны в пространстве всех самосопряженных элементов. В настоящей работе изучается класс представлений, в естественном смысле противоположный классу невырожденных представлений. Будем называть J -симметричное представление в Π_k тах-представлением, если оно обладает инвариантным нейтральным подпространством размерности k (т. е. максимально возможной размерности). Мы построим аналог ГНС-конструкции и докажем его универсальность в классе тах-представлений почти эрмитовых алгебр. В заключение будут рассмотрены вопросы разложимости представлений в зацепленные суммы относительно просто устроенных (расщепимых) слагаемых.

Начнем с общего результата о факторизуемости вполне положительных 2-коциклов, который можно рассматривать как когомологически оснащенную версию теоремы Стайнспринга [9].

Пусть λ — представление банаховой $*$ -алгебры $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а $\lambda^\sim$ — сопряженное представление ($\lambda^\sim(a) = (\lambda(a^*))^*$); тогда $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ является $\mathcal{A}$ -бимодулем относительно действия

$$aXb = \lambda^\sim(a)X\lambda(b) \quad (a, b \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$$

и $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -когомологии можно реализовать в пространствах непрерывных полилинейных отображений из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Аналогично определяются когомологии с коэффициентами в $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ для любых $\mathcal{A}$ -модулей $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$. Напомним, что билинейное отображение $\Phi: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется вполне положительным, если $\sum_{i,j} (\Phi(a_i^*, a_j) \xi_i, \xi_j) \geq 0$ для любых $a_i \in \mathcal{A}, \xi_i \in \mathcal{H}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Phi: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}$ — вполне положительный 2-коцикл; тогда существуют и (с точностью до естественно понимаемой эквивалентности) единственное гильбертово пространство $\mathfrak{H}_\Phi$, представление π_Φ алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathfrak{H}_\Phi$ и 1-коцикл $p_\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathfrak{H}_\Phi)$, такие, что подпространство $p_\Phi(\mathcal{A})\mathcal{H}$ плотно в $\mathfrak{H}_\Phi$ и

$$\Phi(a, b) = p(a^*)p(b) \quad (1)$$

для любых $a, b \in \mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейное непрерывное отображение $\gamma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется λ -диссипацией, если его кограница $d\gamma$ — вполне положительное отображение.

Заметим, что 0-диссипации — это вполне положительные отображения в смысле Стайнспринга [9].

Нетрудно показать, что всякая λ -диссипация становится эрмитовой после прибавления некоторого 1-коцикла; мы будем рассматривать только эрмитовы λ -диссипации.

Пусть γ — некоторая λ -диссипация. Тогда $\Phi = d\gamma$ — вполне положительный 2-коцикл и в силу теоремы 1 существуют пространство $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\Phi$, представление $\pi = \pi_\Phi$ и 1-коцикл $p = p_\Phi$, такие, что выполнено (1). В правой сумме $H = \mathcal{H} + \mathfrak{H} + \mathcal{H}$ определим представление $n_{\lambda, \gamma}$ алгебры $\mathcal{A}$ формулой

$$n_{\lambda, \gamma}(a)(\xi + x + \eta) = (\lambda^\sim(a)\xi + p(a)x + \gamma(a)\eta) + (\pi(a)x + p(a)\eta) + \lambda(a)\eta.$$

Нетрудно проверить, что относительно индефинитного скалярного произведения $[\xi_1 + x_1 + \eta_1, \xi_2 + x_2 + \eta_2] = (\xi_1, \eta_2)_{\mathcal{H}} + (x_1, x_2)_{\mathfrak{H}} + (\eta_1, \xi_2)_{\mathcal{H}}$ пространство H является пространством Π_k с $k = \dim \mathcal{H}$ (пространством Крейна, если $\dim \mathcal{H} = \infty$) и представление $n_{\lambda, \gamma}$ J -симметрично.

Из теоремы 1 нетрудно вывести (трактуя когомологически компоненты в стандартной операторно-матричной реализации представления), что всякое шах-представление банаховой $*$ -алгебры в Π_k J -унитарно эквивалентно некоторому $n_{\lambda, \gamma}$. Это позволяет описать все Π_k -представления довольно широкого класса алгебр.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если A — почти эрмитова банахова $*$ -алгебра, не имеющая нетривиальных конечномерных представлений, то всякое, с точностью до J -унитарной эквивалентности и до тривиального прямого слагаемого, ее Π_k -представление задается вполне положительным отображением $\gamma: A \rightarrow M_k(\mathbb{C})$ по формуле $T = n_{0, \gamma}$.*

В частности, представления почти эрмитовых алгебр в Π_1 строятся по положительным функционалам.

Обратимся к вопросу о разложимости Π_k -представления в сумму простейших.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть π — представление почти эрмитовой $*$ -алгебры $\mathcal{A}$ в Π_k -пространстве H , L — его максимальное нейтральное инвариантное подпространство и λ — ограничение π на L . Если образ представления λ — полупростая алгебра, а ядро имеет ограниченную аппроксимативную единицу, то $H = L + M + \mathfrak{H}$, где все слагаемые инвариантны, M нейтрально и ограничение π на $\mathfrak{H}$ подобно $*$ -представлению.*

Отказ от условия полупростоты алгебры $\lambda(\mathcal{A})$ создает лишь «конечномерные препятствия» — ограничивая π на подалгебру конечной коразмерности $\text{Ker } \lambda \cap \text{Ker } \lambda^\sim$, можно считать, что $\lambda = 0$. Существенное второе ограничение, не выполняющееся в таких важных примерах, как представления дифференциальных [8] и (неаменабельных) групповых алгебр. Условимся называть представление *расщепимым*, если оно лишь конечномерным прямым слагаемым отличается от представления, подобного $*$ -представлению.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы представление $n_{\lambda, \gamma}$ было расщепимым, необходимо и достаточно, чтобы отображение $d\gamma$ было непрерывным относительно обертывающей C^* -нормы $\|\cdot\|_0$ алгебры $\mathcal{A}$.*

Рассмотрим теперь вопрос о разложимости ГНС-представления в зацепленную сумму расщепимых представлений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Разложением Π_k -пространства H в сумму, зацепленную по нейтральному подпространству L , называется такой набор подпространств H_i , содержащих L , что подпространство $\mathcal{E} = \bigcap_i H_i$ невырожденно, а подпространства $L_i = H_i \cap L^\perp$ взаимно J -ортогональны и порождают $L^\perp$.

Из определения легко следует, что $\dim \mathcal{E} = 2 \dim L$ и все подпространства H_i невырожденны. Обозначим через P_i J -ортогональные проекторы на H_i в H . Если π есть J -симметричное представление алгебры $\mathcal{A}$ в H , относительно которого все L_i инвариантны, то, полагая $\pi_i(a) = P_i \pi(a)|_{H_i}$, мы зададим J -симметричные представления π_i в H_i . В этом случае говорят, что π разложено в зацепленную по L сумму представлений π_i .

ТЕОРЕМА 5. Для того чтобы представление $\pi_{\lambda, \gamma}$ допускало разложение в зацепленную сумму расцепимых представлений, необходимо и достаточно, чтобы вполне положительное отображение $d\gamma$ было полунепрерывным снизу относительно нормы $\|\cdot\|_0$ (т. е. чтобы из того, что $\|a_n - a\|_0 \rightarrow 0$, следовало $\|d\gamma(a^*, a)\| \leq \limsup \|d\gamma(a_n^*, a_n)\|$).

Автор признателен А. И. Логинову и Э. В. Киссину за полезные обсуждения рассмотренных в работе вопросов, а также рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М. А. Изв. АН СССР, сер. матем., **30**, №5, 1111–1132 (1966).
2. Исмагилов Р. С. Изв. АН СССР, сер. матем., **30**, №3, 497–522 (1966).
3. Исмагилов Р. С. Матем. заметки, **35**, №1, 99–105 (1984).
4. Наймарк М. А., Исмагилов Р. С. Представления групп и алгебр в пространствах с индефинитной метрикой. Итоги науки и техники. Математический анализ, ВИНТИ, 1968, с. 73–105.
5. Kissin E., Loginov A. I., Shulman V. S. Derivations of C^* -algebras and almost hermitian representations on Π_k -spaces. Pacif. J. Math. (в печати).
6. Шульман В. С. Матем. заметки, **22**, №4, 583–592 (1977).
7. Шульман В. С. Функц. анализ и его прил., **14**, вып. 2, 93–94 (1980).
8. Kissin E., Shulman V. S. Proc. Edinburgh Math. Soc., **37**, 399–422 (1984).
9. Stinespring W. F. Proc. Am. Math. Soc., **6**, 211–216 (1965).

Вологодский государственный
естественно-математический лицей

Поступило в редакцию
12 октября 1995 г.