Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Арнольд, Замечания о параболических кривых на поверхностях и многомерной теории Мёбиуса–Штурма, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 4, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:30:14

УДК 517.9

Замечания о параболических кривых на поверхностях и многомерной теории Мёбиуса–Штурма*

© 1997. В. И. Арнольд

§1. Гипотеза о четырех параболических кривых

Согласно классической теореме Мёбиуса, кривая на проективной плоскости, близкая к проективной прямой, имеет не менее трех точек перегиба. Эта теорема является частным случаем теоремы Штурма–Гурвица [2], согласно которой число перемен знака функции на окружности не меньше, чем число перемен знака наинизшей гармоники, входящей в ряд Фурье этой функции с ненулевым коэффициентом. Теорема Мёбиуса распространяется на все вложенные в проективную плоскость нестягиваемые кривые. Теорема Штурма, вероятно, тоже имеет глобальную версию.

Попытки перенести теоремы Мёбиуса и Штурма на многомерный случай (т. е. на поверхности в проективном пространстве и на функции нескольких переменных) показывают, что естественным аналогом точек перегиба являются параболические точки поверхностей и нули гессиана функций. Это значит, что дифференциальные операторы, соответствующие поверхностям и функциям двух переменных, — не линейные, как в случае обычной теории Штурма функций одной переменной, а квадратичные (в случае n -мерных многообразий и функций n переменных — степени n).

В соответствии с общим принципом топологической экономии алгебро-геометрических объектов, можно ожидать, что, скажем, среди поверхностей, получающихся из проективной плоскости в проективном пространстве малым шевелением, наименьшее число параболических кривых имеют кубические поверхности. Для таких кубических поверхностей число параболических кривых (вычисленное Б. Сегре [1]) равно четырём. Таким образом возникает *гипотеза Аикарди*: *число параболических кривых на поверхности общего положения в проективном пространстве, гладко близкой к проективной плоскости, не меньше четырех* (см. [3]).

Можно даже предполагать (по аналогии с теоремой Мёбиуса и с теорией лагранжевых пересечений и лежандровых зацеплений в симплектической и контактной топологии), что число параболических кривых остается не меньшим четырех и при больших деформациях проективной плоскости (по меньшей мере до тех пор, пока получающаяся поверхность остается вложенной) и что соответствующие результаты «многозначной теории Морса для старших производных» остаются справедливыми и в более общих задачах симплектической и контактной топологии с неголономными связями. Однако на сегодня не доказан (и не

* Исследования поддержаны РФФИ, проект 96-01-01104.

опровергнут) даже сформулированный выше простейший частный случай этих гипотез, который и исследуется ниже.

Наша стратегия будет состоять в следующем. Фиксируем какую-либо конструкцию возмущений проективной плоскости, для которых число параболических кривых удастся контролировать. Постараемся подобрать параметры конструкции так, чтобы она дала меньше четырех параболических кривых. Если такой подбор возможен, то мы получаем опровергающий гипотезу пример. Если же при любом выборе параметров получается не менее четырех параболических кривых, то мы получаем, с одной стороны, подтверждение гипотезы, а с другой — (не всегда тривиальную) информацию о деформациях рассматриваемого класса (например, о сферических функциях с особенностями).

Быть может, наиболее естественным было бы рассмотреть полиэдральные деформации, построенные по триангуляциям возмущаемой проективной плоскости. Деформируя затем полиэдр в гладкую поверхность общего положения при помощи какого-либо специально подобранного сглаживания, мы могли бы, вероятно, описать число возникающих параболических кривых в терминах комбинаторики многогранника (включая обобщенные кривизны, сосредоточенные на ребрах и в вершинах). В таком случае гипотеза о четырех параболических кривых превратилась бы в комбинаторное утверждение о возможных триангуляциях проективной плоскости.

Однако в настоящей статье такое сглаживание не определено и вместо комбинаторного рассматривается другое возмущение проективной плоскости. Это возмущение является гиперболическим почти всюду, исключая лишь конечное число логарифмических полюсов (в окрестности каждого из которых его можно сгладить, создав одну параболическую кривую и одну эллиптическую компоненту).

Такие «гиперболические» возмущения проективной плоскости строятся при помощи обобщенных нечетных сферических функций (удовлетворяющих на S^2 уравнению $\Delta_S u + 2u = g$, где Δ_S — сферический лапласиан, а g — комбинация δ -функций). Мы докажем, что *число параболических кривых на возмущенных поверхностях, доставляемых этой конструкцией, не меньше четырех.*

Другой способ построения возмущений проективной плоскости состоит в том, что проективная плоскость делится на (большой) круг и (тонкий) лист Мёбиуса и возмущение фиксируется на одной из частей. Например, можно рассмотреть возмущение в виде кубической поверхности над листом Мёбиуса. После этого для исследования возмущения над кругом достаточно исследовать нули гессiana функции, задающей деформацию в аффинной системе координат и удовлетворяющей на крае круга заданным граничным условиям.

Мы приходим таким образом к задаче о параболических кривых на плоскости, заданных уравнением $F_{xx}F_{yy} = F_{xy}^2$.

Исследование таких кривых эквивалентно изучению критических точек и каустик градиентных отображений. Из наших результатов вытекает, в частности, оценка снизу числа сборок градиентного отображения с заданными граничными условиями. Например, *если потенциал общего положения совпадает вне некоторого большого круга с $F = x^3 - 3xy^2$, то градиентное отображение имеет внутри этого круга не менее трех точек сборки (так что каустика имеет не меньше трех точек возврата).*

Это показывает, что градиентные отображения выделены своими топологическими свойствами в классе всех лагранжевых отображений (в котором наше

отображение можно, согласно Энтovu и Элиашбергу, продеформировать в отображение с всего одной сборкой).

Еще один способ контролировать параболические кривые — начать с поверхности с вырожденной параболической кривой и деформировать ее до поверхности общего положения (в окрестности этой кривой). Например, для поверхности $z = 1/(x^2 + y^2)$ вырожденной параболической кривой является бесконечно удаленная прямая.

В этом и других подобных примерах мы доказываем, что *при общей однопараметрической малой деформации поверхности из вырожденной параболической кривой рождается столько невырожденных параболических кривых, что их общее число становится не меньше четырех.*

В предыдущем примере на бесконечности рождается не меньше трех параболических компонент (по существу — вследствие теоремы Мёбиуса–Штурма).

Я предполагаю, что эти результаты, доказанные ниже только для малых однопараметрических деформаций, на самом деле справедливы для целой окрестности в пространстве деформаций (причем не только в наших специальных примерах, но и для всех поверхностей с вырожденными параболическими кривыми). Из справедливости гипотезы Аикарди вытекала бы их справедливость даже при очень больших возмущениях поверхности, лишь бы она не менялась вне окрестности вырожденной параболической кривой.

§2. Уравнения параболических кривых

Будем описывать проективное пространство $\mathbb{RP}^3$ при помощи однородных координат $[x:y:z:w]$. Начнем с невозмущенной плоскости $\mathbb{RP}^2$, заданной уравнением $w = 0$. Всякое возмущение этой плоскости задается уравнением $w = f(x, y, z)$, где f — однородная функция степени 1 (следовательно, f — нечетная функция). Найдём параболические кривые на этой возмущенной поверхности. Хорошо известна

ЛЕММА 1. *Параболические точки на поверхности $w = f$ изображаются на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ критическими точками ограничения градиента функции f на эту сферу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В параболической точке поверхность необычно хорошо приближается плоскостью. Плоскость в $\mathbb{RP}^3$ задается линейной функцией f . Градиент линейной функции постоянен. Если f в данной точке необычно хорошо приближается линейной функцией, то ее градиент необычно хорошо приближается константой, т. е. эта точка критическая. $\square$

Сферу можно (в окрестности изучаемой точки) заменить любой поверхностью, трансверсальной к лучам, так как градиент однородной функции степени один на луче постоянен. Например, можно взять плоскость, касательную к сфере в изучаемой точке.

ПРИМЕР. Область $z \neq 0$ обслуживается плоскостью $z = 1$. Обозначим через $F(x, y) = f(x, y, 1)$ ограничение функции f на эту плоскость. Мы можем рассматривать $w = F(x, y)$ как аффинное уравнение возмущенной поверхности в карте $z = 1$. Очевидна

ЛЕММА 2. *Уравнение линии параболических точек поверхности $w = f$*

записывается в этих координатах в виде

$$\text{Hess } F = \det \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix} = 0. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение касательной плоскости $w = ax + by + cz$ превращается при $z = 1$ в $w = ax + by + c$. Коэффициенты a , b и c равны поэтому значениям F_x , F_y и F в рассматриваемой точке. Отличие поверхности от касательной плоскости измеряется (в квадратичном приближении) вторым дифференциалом функции F в этой точке. Эта квадратичная форма вырождена, если и только если $\text{Hess } F = 0$. $\square$

Введем на плоскости $z = 1$ полярные координаты ($x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$). Будем пользоваться старинными обозначениями: $F_R = (\partial/\partial R)F(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$ и т.д.

ЛЕММА 3. Уравнение линии параболических точек поверхности $w = f$ записывается в полярных координатах в виде

$$\det \begin{pmatrix} F_{\varphi\varphi} + RF_R & F_{\varphi R} - F_{\varphi}/R \\ F_{\varphi R} - F_{\varphi}/R & F_{RR} \end{pmatrix} = 0. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку (R_0, φ_0) . Касательная плоскость в этой точке имеет уравнение $w = aR \cos \varphi + bR \sin \varphi + c$. Приравняв 1-струи функции F и этой функции в нашей точке, получаем для (a, b, c) уравнения

$$F^{(0)} = aR_0 \cos \varphi_0 + bR_0 \sin \varphi_0 + c,$$

$$F_R^{(0)} = a \cos \varphi_0 + b \sin \varphi_0,$$

$$F_{\varphi}^{(0)} = -aR_0 \sin \varphi_0 + bR_0 \cos \varphi_0$$

(верхний индекс 0 означает подстановку изучаемой точки). Вторые производные разности $F - aR \cos \varphi - bR \sin \varphi - c$ в исследуемой точке составляют указанную в (2) матрицу. Ее определитель обращается в 0 в точности в параболических точках. $\square$

Вблизи бесконечно удаленных точек ($z = 0$) удобна система цилиндрических координат ($r = 1/R$, φ). Эта карта проективной плоскости получается при центральном проектировании сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ на цилиндр ($x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, $z = r$), касающийся ее вдоль экватора. Противоположные точки цилиндра, (r, φ) и $(-r, \varphi + \pi)$, изображают одну и ту же точку проективной плоскости. Параболическая кривая коориентирована; поэтому каждая ее компонента изображена на цилиндре двумя кривыми.

Точка ($x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $z = 1$) плоскости $z = 1$ соответствует на цилиндре точке ($x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, $z = r = 1/R$). Однородное уравнение возмущенной поверхности $w = f(x, y, z)$ принимает на этом цилиндре вид $w = R^{-1}F(R, \varphi)$ (конечно, имеется в виду выражение функции F , заданной на плоскости, через полярные координаты).

Запишем это уравнение в виде $w = H(r, \varphi)$. Функции H и F связаны соотношениями

$$H(r, \varphi) = rF(1/r, \varphi), \quad F(R, \varphi) = RH(1/R, \varphi). \quad (3)$$

Функция H гладкая в точке $r = 0$. Она удовлетворяет соотношению

$$H(-r, \varphi + \pi) = -H(r, \varphi),$$

так как функция $w = f(x, y, z)$ нечетна. Поэтому коэффициенты Тейлора разложений

$$\begin{aligned} H(r, \varphi) &= h_0(\varphi) + rh_1(\varphi) + \frac{r^2}{2} h_2(\varphi) + \dots, \\ F(R, \varphi) &= Rh_0(\varphi) + h_1(\varphi) + \frac{1}{2R} h_2(\varphi) + \dots \end{aligned}$$

удовлетворяют условиям нечетности

$$h_{2k}(\varphi + \pi) = -h_{2k}(\varphi), \quad h_{2k+1}(\varphi + \pi) = h_{2k+1}(\varphi). \quad (4)$$

ЛЕММА 4. *Уравнение линии параболических точек поверхности $w = f$ записывается в цилиндрических координатах вблизи бесконечности в виде*

$$\det \begin{pmatrix} H_{\varphi\varphi} + H - rH_r & H_{r\varphi} \\ H_{r\varphi} & H_{rr} \end{pmatrix} = 0. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая как в доказательстве леммы 3, получаем $w = a \cos \varphi + b \sin \varphi + cr$. Следовательно, (a, b, c) удовлетворяют уравнениям

$$H^{(0)} = a \cos \varphi_0 + b \sin \varphi_0 + cr_0, \quad H_r^{(0)} = c, \quad H_\varphi^{(0)} = -a \sin \varphi_0 + b \cos \varphi_0.$$

Вторые производные разности $H - a \cos \varphi - b \sin \varphi - cr$ образуют матрицу (5). $\square$

В дальнейшем нам потребуется еще

ЛЕММА 5. *Предположим, что однородная первой степени функция f гармоническая. Тогда соответствующая ей квадратичная форма, измеряющая отклонение поверхности $w = f$ от своей касательной плоскости, либо гиперболическая, либо нулевая (так что все три построенные выше гессиана (1), (2), (5) отрицательны или равны 0).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не нарушая общности, мы можем считать, что изучаемая точка имеет координаты $(x = y = 0, z = 1)$. Тогда $f_{zz} = 0$ вследствие однородности, а $f_{xx} = F_{xx}$ и $f_{yy} = F_{yy}$. Поэтому след матрицы гессиана, $F_{xx} + F_{yy}$, равен нулю. Итак, в нашей точке $\text{Hess } F = -F_{xx}^2 - F_{yy}^2 \leq 0$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Ограничение гармонической в пространстве однородной функции степени 1 на единичную сферу является собственной функцией сферического лапласиана Δ_S с собственным значением -2 : $\Delta_S u + 2u = 0$. Сферические функции степени 1 — это просто линейные функции $ax + by + cz$. Однако мы можем использовать лемму 5 также для нечетных сферических функций с особенностями, для которых $\Delta_S u + 2u = g$, где g — нечетная обобщенная функция на сфере, сосредоточенная в конечном числе точек. Решения такого уравнения определяют возмущения проективной плоскости, вторая квадратичная форма которых гиперболическа всюду, исключая лишь полюсы в точках носителя g и точки полного вырождения (где вся форма равна нулю).

Такие специальные сингулярные возмущения можно использовать для построения гладкого возмущения с контролируемыми параболическими кривыми (по одной около каждого полюса и около каждой точки зануления формы для типичной функции g).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция на сфере называется *гиперболической*, если соответствующая ей квадратичная форма гиперболична всюду, исключая конечное число точек (где функция может иметь особенности).

Простейшей особенностью гиперболической функции является (логарифмический) полюс.

ГИПОТЕЗА. *Нечетная гиперболическая функция с простейшими особенностями на сфере имеет не менее шести полюсов.*

§3. Особые сферические функции

Особой сферической функцией назовем функцию, удовлетворяющую уравнению сферических функций всюду, кроме конечного числа точек, где результат применения к ней оператора является обобщенной функцией конечного порядка (комбинацией δ -функций и их производных).

ЛЕММА 6. *Особая нечетная сферическая функция первого порядка на двумерной сфере, имеющая лишь простейшие полюсы, имеет их не меньше шести. Если полюсов шесть, то все они лежат на окружности одного большого круга.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\Delta_S u + 2u = g$ — линейная комбинация конечного числа δ -функций с положительными коэффициентами в k точках и с противоположными коэффициентами в противоположных точках сферы. Согласно альтернативе Фредгольма, условие разрешимости этого уравнения состоит в ортогональности g решениям уравнения $\Delta_S u + 2u = 0$, т.е. линейным функциям. Это условие ортогональности означает, что центр масс k положительных составляющих обобщенной функции g совпадает с центром сферы. Центр масс двух точек на сфере находится в ее центре, только если точки противоположны, а массы равны. В этом случае $g = 0$. Значит $k \geq 3$. Центр масс трех точек на сфере попадает в центр сферы, только если проходящая через них плоскость проходит через центр сферы. В этом случае и противоположные три точки лежат в той же плоскости. $\square$

ТЕОРЕМА 1. *Поверхность общего положения, полученная из проективной плоскости деформацией, построенной по нечетной особой сферической функции общего положения, имеющей лишь простейшие полюсы (при помощи сглаживания и малого шевеления этой функции), имеет не меньше четырех параболических кривых.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сглаживание около каждого полюса создает одну маленькую параболическую кривую, окружающую эллиптическую область.

Зануление всей формы, исключительное для поверхностей общего положения, может устойчиво встречаться в отдельных точках на гиперболических поверхностях. Такие поверхности можно строить при помощи сферических функций или решений иных эллиптических дифференциальных уравнений. Например, для обычных гармонических функций $u = \operatorname{Re} U$ на плоскости переменной $z = x + iy$ все три вторые частные производные зануляются в нулях второй производной голоморфной функции U , которые устойчивы при деформации голоморфной функции.

По лемме 6 число полюсов (и, значит, получаемых из них при сглаживании параболических кривых) не меньше шести. Кроме этих особенностей, обязательно есть еще точки зануления формы. Докажем это.

В гиперболической области (на дополнении к полюсам и точкам зануления) на сфере определено поле асимптотических направлений. Действительно, в этой области определено поле гиперболических квадратичных форм на касательных плоскостях сферы. Прямая, ограничивающая сектор положительности формы справа, определена ориентацией сферы инвариантно. Эти прямые и составляют поле асимптотических направлений.

Сумма индексов особых точек этого поля (быть может, полуделых, так как прямые поля не ориентированы) равна 2. Но $2k$ полюсов дают в индекс вклад $2k$ (так как индекс асимптотического поля в простейшем полюсе (а вероятно, и в любой точке, где гиперболическая функция стремится к ∞) равен 1). Следовательно, сумма индексов точек зануления равна $2 - 2k \leq -4$. В частности, индекс хотя бы одной из этих точек отличен от 0.

Докажем, что при приведении поверхности (или функции) в общее положение около такой точки обязательно появится параболическая кривая. Действительно, рассмотрим (локально, в окрестности этой точки, которую мы можем считать имеющей координаты $(x = 0, y = 0, z = 1)$) отображение плоскости (x, y) в трехмерное пространство квадратичных форм с координатами (A, B, C) , заданное формулами $A = F_{xx}$, $B = F_{xy}$, $C = F_{yy}$. Вырожденные формы образуют конус $AC = B^2$. Параболические точки — это прообраз этого конуса при нашем отображении. Ввиду гиперболичности функции F образ окрестности изолированной точки $x = y = 0$ зануления формы попадает (за исключением образа 0 самой этой точки) в область гиперболических форм $AC < B^2$. Это — неодносвязная внешняя область дополнения к конусу.

Индекс нашей изолированной особой точки асимптотического поля с ненулевым коэффициентом пропорционален коэффициенту зацепления образа края окрестности нашей точки с осью конуса. Поэтому для точки зануления с ненулевым индексом этот коэффициент зацепления отличен от нуля. При типичном малом шевелении функции F (перестающей быть гиперболической) образ окрестности перестанет проходить через вершину конуса ($A = B = C = 0$), но пересечение с конусом сохранится. Следовательно, вблизи точки зануления $x = y = 0$ возникнет параболическая кривая.

Вместе с тремя параболическими кривыми, возникшими вблизи полюсов, мы получаем на $\mathbb{R}P^2$ четыре параболические кривые. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Наши рассуждения дают $3k - 2$ параболических кривых на $\mathbb{R}P^2$, если исходная нечетная гиперболическая функция на сфере имела $2k$ простейших полюсов и лишь простейшие точки зануления (что, вероятно, выполняется для особых нечетных сферических функций при типичном распределении зарядов g).

Дело в том, что простейшие точки зануления — такие же обезьяньи седла, как у гармонической функции $F = \operatorname{Re}(x + iy)^3$ в нуле. В этом простейшем случае индекс поля асимптотических направлений равен $-1/2$, а коэффициент зацепления с осью конуса равен -1 (при естественном выборе ориентации плоскости форм с нулевым следом, $A + C = 0$). Отображение окрестности точки зануления формы в гиперболическую область пространства форм (A, B, C) в этом случае трансверсально оси конуса в точке зануления 0.

Мы получаем, следовательно, на сфере N простейших точек зануления с суммой индексов $2 - 2k = -\frac{1}{2}N$. Значит, число $N/2$ простейших точек зануления

на $\mathbb{R}P^2$ есть $2k - 2$. Вместе с k полюсами это дает $3k - 2$ параболических кривых. Если же точки зануления не простейшие, то может, видимо, получиться всего четыре параболических кривых, как показывает пример, в котором положительные массы образуют равносторонний треугольник.

Сферические функции с особенностями можно получать из однородных рациональных гармонических функций в $\mathbb{R}^3$. Так можно найти простейшую нечетную особую сферическую функцию степени 1 с особенностями только в полюсах сферы (вычисления очень просты в координатах $\xi = x + iy$, $\eta = x - iy$). Эти особенности мультипольные: в наших обозначениях

$$F = (2R^{-2} + 3) \cos 2\varphi.$$

При возмущении функции F рождаются по меньшей мере четыре параболические кривые на $\mathbb{R}P^2$: две — из двух (простейших) точек зануления на бесконечности и две — вблизи максимума и минимума сглаженной особенности.

ГИПОТЕЗА. Число параболических кривых, получающихся при сглаживании гиперболической нечетной функции на сфере и ее приведении в общее положение, не меньше четырех, каковы бы ни были полюсы конечного порядка.

Это не доказано даже для рациональных сферических функций степени 1 (но, конечно, следовало бы из справедливости гипотезы Аикарди).

§4. Деформация вырожденной параболической кривой

Рассмотрим кубическую поверхность, заданную в аффинной карте $z = 1$ уравнением $w = 1/(x^2 + y^2)$ (особенность в нуле мы позже сгладим). Эта кубическая поверхность, для которой $F = R^{-2}$, $H = r^3$, гиперболична в области гладкости над плоскостью (x, y) , но имеет на бесконечности ($r = 0$) вырожденную параболическую кривую. Возмущения этой поверхности вблизи бесконечности задаются в цилиндрических координатах формулой $H = r^3 + \varepsilon h(r, \varphi)$, где $\varepsilon \ll 1$, а возмущающая функция h удовлетворяет условию нечетности $h(-r, \varphi + \pi) = -h(r, \varphi)$.

ТЕОРЕМА 2. Для достаточно малых ε и для h общего положения вырожденная параболическая кривая исходной поверхности на бесконечности превращается не менее чем в три невырожденные параболические кривые возмущенной поверхности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение параболических точек (5) имеет вид

$$-12r^4 + \varepsilon(6r(h_{\varphi\varphi} + h - rh_r) - 2r^3h_{rr}) + O(\varepsilon^2) = 0. \quad (6)$$

Введем новое переменное ρ по формуле $r = \varepsilon^{1/3}\rho$. Уравнение (6) примет вид

$$\varepsilon^{4/3}[\rho(-12\rho^3 + 6a(\varphi)) + O(\varepsilon^{1/3})] = 0, \quad (7)$$

где $a = (h_{\varphi\varphi} + h)|_{r=0}$. Пренебрегая вначале членом O , получаем из (7) кривую, состоящую из двух гладких ветвей, $\rho = 0$ и $\rho = (a(\varphi)/2)^{1/3}$, трансверсально пересекающихся в нулях функции a (для h общего положения эти нули простые).

По теореме Штурма число этих нулей не меньше шести. Действительно, согласно (4), при $r = 0$ имеем $h(\varphi + \pi) = -h(\varphi)$. Поэтому все гармоники h нечетны. Следовательно, наименьшая гармоника функции a — не менее, чем третья, и число ее нулей не менее шести.

Произведение $\rho(-12\rho^3 + 6a(\varphi))$, где a имеет простые нули, — функция Морса вблизи седел, расположенных в $2k$ нулях функции a . При возмущении произведения, доставляемом слагаемым O в (7), эти $2k$ седел перемешаются на ненулевые уровни, так что наша пара пересекающихся ветвей нулевого уровня функции (7) перестраивается в неособую кривую. Гессиановость уравнения (7) определяет знаки всех $2k$ перестроек.

ЛЕММА 7. *Получающаяся при перестройке кривая (7) состоит из $2k$ компонент, ограничивающих области, близкие к областям положительности произведения $\rho(-12\rho^3 + 6a(\varphi))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При малой общей деформации плоскости в пространстве квадратичных форм $A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$, пересекающей конус вырожденных форм $AC = B^2$ по двум прямым, получается плоскость, пересекающая конус по гиперболе, причем в области между ветвями гиперболы дискриминант $AC - B^2$ отрицателен. Иными словами, из четырех квадрантов невозмущенной плоскости, состоящих из эллиптических и из гиперболических форм попеременно, при общем возмущении плоскости два противоположных гиперболических квадранта соединяются в одну область, а два эллиптических раздвигаются. $\square$

Итак, число рождающихся на бесконечности компонент есть $2k \geq 6$ на цилиндре, т.е. $k \geq 3$ на $\mathbb{R}P^2$. Теорема 2 доказана. $\square$

Из теоремы следует, что при сглаживании в нуле и приведении в общее положение нашей поверхности получится гладкая поверхность с не менее чем четырьмя параболическими кривыми.

ЗАМЕЧАНИЕ. По-видимому, число параболических кривых на любой поверхности, заданной функцией $H = r^3 + h(r, \varphi)$, $h(-r, \varphi + \pi) = -h(r, \varphi)$, с типичным и достаточно малым возмущением h (вероятно, с любым типичным h , исчезающим при $|r| > 1$) не меньше трех. Выше это доказано лишь для однопараметрических семейств деформаций.

Рассмотрим теперь кубическую поверхность, заданную (в аффинной карте $z = 1$) уравнением $w = x/(x^2 + y^2) = R^{-1} \cos \varphi$. Эта функция гармоническая, а потому гиперболическая (с особенностью в нуле). Поверхность имеет вырожденную параболическую кривую на бесконечности (где поверхность задается функцией $H = r^2 \cos \varphi$ в наших цилиндрических координатах §2, так что, согласно (5), уравнение параболических точек принимает вид $-4r^2 = 0$). Возмущенная поверхность задается вблизи бесконечности функцией

$$H = r^2 \cos \varphi + \varepsilon h(r, \varphi), \quad \varepsilon \ll 1, \quad h(-r, \varphi + \pi) = -h(r, \varphi).$$

ТЕОРЕМА 3. *Для достаточно малых ε и для h общего положения вырожденная параболическая кривая вблизи бесконечности превращается в не менее чем две невырожденные параболические кривые на возмущенной поверхности.*

Здесь тоже гипотетически достаточно исчезновения возмущения (вовсе не малого) при $|r| \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая как в доказательстве теоремы 2, получаем из (5)

$$-4r^2 + \varepsilon(h_{\varphi\varphi} + h)|_{r=0} 2 \cos \varphi + O(r\varepsilon) + O(\varepsilon^2) = 0. \quad (6')$$

Полагая $r = \varepsilon^{1/2} \rho$, находим

$$\varepsilon(-4\rho^2 + 2a \cos \varphi + O(\varepsilon^{1/2})) = 0. \quad (7')$$

Произведение $a \cos \varphi$ (где $a = (h_{\varphi\varphi} + h)|_{r=0}$) имеет для h общего положения не менее восьми простых нулей (так как a по теореме Штурма имеет не менее шести нулей). Уравнение $-4\rho^2 + 2a(\varphi) \cos \varphi = 0$ определяет на цилиндре $\{(r, \varphi)\}$ не менее четырех гладких овалов (соответствующих интервалам положительности функции $a \cos \varphi$). Учет малого возмущения ($O(\varepsilon^{1/2})$ в (7')) их не разрушает. Над $\mathbb{RP}^2$ получаем не менее двух овалов параболической кривой. $\square$

ТЕОРЕМА 4. *При сглаживании функции $w = x/(x^2 + y^2)$ вблизи нуля и приведении соответствующей проективной поверхности в общее положение малым шевелением получится поверхность с не менее чем четырьмя параболическими кривыми.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На бесконечности возникнет по теореме 3 не менее двух параболических кривых. Докажем, что при сглаживании нашей функции вблизи нуля образуется еще не менее двух параболических кривых.

С этой целью заметим, что сглаженная функция обязательно имеет максимум и минимум. Действительно, пополняя плоскость (x, y) до сферы одной точкой при помощи стереографической проекции, мы получим из нашей функции $R^{-1} \cos \varphi$ гладкую вблизи бесконечно удаленной точки $R = \infty$ функцию на сфере, причем эта бесконечно удаленная точка для нее не будет критической. При типичном сглаживании около нуля получится всюду гладкая на сфере функция, имеющая невырожденные максимум и минимум на сфере.

В окрестности максимума форма d^2F отрицательно определенная, а в окрестности минимума положительно определенная. Поэтому при типичном сглаживании возникают две различные параболические кривые — одна ограничивает область положительной, а другая — отрицательной определенности формы d^2F .

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко построить пример сглаживания, когда около нуля рождаются ровно две параболические кривые.

Для сглаживания вида $F = f(R) \cos \varphi$ имеем $f(R) = Rg(R^2)$. Кривая параболических точек определяется (вытекающим из (2)) уравнением

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = -R^2 \frac{f''}{f - Rf'} = 3 + 2R^2 \frac{g''}{g'}, \quad \text{где } g' = \frac{dg}{d(R^2)}.$$

При $F = R(R^2 + \varepsilon)^{-1} \cos \varphi$ параболическая кривая имеет поэтому вид маленькой лемнискаты с трансверсальным пересечением ветвей в особой точке. При общей малой деформации гиперболические квадранты соединяются и получаются два параболических овала.

§5. Топологические свойства градиентных отображений

Рассмотрим гладкое отображение A ориентированной плоскости на ориентированную плоскость. Область, где якобиан J отображения A положителен, назовем *эллиптической*, а где отрицателен — *гиперболической*. Для типичного отображения их разделяет гладкая параболическая кривая $J = 0$.

ПРИМЕР. Если $A = \operatorname{grad} F$, то эллиптическая и гиперболическая области — это области, над которыми точки графика функции F эллиптические и гиперболические.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Индексом $i(\gamma)$ ориентированной кривой γ , не пересекающей параболическую кривую отображения A , называется число оборотов касательного вектора кривой $A(\gamma)$ (для сокращения в обозначении не указывается отображение A).

ПРИМЕР. Индекс края малого диска, расположенного в эллиптической области, равен $+1$, а в гиперболической — -1 .

Пусть γ — простая замкнутая кривая на ориентированной плоскости, ориентированная как край ограниченного ею диска и не пересекающая параболическую кривую.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Приведенным индексом кривой называется число $\tilde{i}(\gamma) = i(\gamma) - \text{sign}(J|\gamma)$.

ПРИМЕР. Приведенный индекс малой кривой равен 0.

ТЕОРЕМА 5. Приведенный индекс аддитивен: если M — плоская область с краем, в которой $J \neq 0$, ограниченная снаружи кривой γ_0 и изнутри кривыми γ_j (так что $\partial M = \gamma_0 - \sum \gamma_j$), то $\tilde{i}(\gamma_0) = \sum \tilde{i}(\gamma_j)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Трансляционно-инвариантное векторное поле v на плоскости-образе поднимается на иммерсированную в нее отображением A область M в виде поля w на M без особых точек. Обозначим через ν_k и μ_k числа оборотов касательного вектора края, $\dot{\gamma}$, и вектора w вдоль компоненты γ_k края области M (ориентированной как граница диска). Тогда $\mu_0 = \sum \mu_j$ (так как поле w на M не имеет особых точек), а $\nu_k = 1$ при всех k . Поэтому

$$\mu_0 - \nu_0 + 1 = \sum (\mu_j - \nu_j + 1). \quad (8)$$

Индекс кривой γ есть число оборотов вектора $A_*(\dot{\gamma})$ по отношению к постоянному полю v . Это число отличается от числа $\nu - \mu$ оборотов вектора $\dot{\gamma}$ по отношению к w лишь знаком s : $i(\gamma) = (\nu - \mu)s$. Поэтому формула (8) доказывает аддитивность приведенного индекса $\tilde{i} = (\mu - \nu - 1)s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка, где ядро производной отображения A касается параболической кривой, называется специальной.

Для отображения A общего положения порядок касания первый.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Специальная точка называется *положительной* (или *эллиптической*) (соответственно *отрицательной* или *гиперболической*), если смотрящие в эллиптическую область векторы ядер в близких параболических точках направлены от специальной точки (соответственно к ней).

ПРИМЕР. Если $A = \text{grad } F$, то специальная точка эллиптическая (гиперболическая) в зависимости от характера соответствующей особой точки поля асимптотических направлений графика F , поднятого на определяемую им же самим поверхность в пространстве расслоения касательных прямых графика. Эта поверхность двулистно накрывает гиперболическую область со складкой над параболической кривой (для типичной функции F). Поднятое поле направлений локально оказывается полем направлений гладкого векторного поля, обращаемого в нуль над специальной точкой. Если специальная точка эллиптическая, то индекс этого векторного поля в его особой точке равен $+1$ (т.е. эта точка — узел или фокус), а если гиперболическая — то -1 (седло).

Вблизи эллиптической специальной точки отображение A локально диффеоморфно отображает гиперболическую полуокрестность (где якобиан отрицателен) на малую область, ограниченную клювом каустики, сильно растягивая эллиптическую область. Вблизи гиперболической точки сильно растягивается гиперболическая область.

Рассмотрим две близкие к параболической кривой γ на плоскости кривые: γ^+ в эллиптической области и γ^- в гиперболической (все они ориентированы как границы дисков).

ТЕОРЕМА 6. *Разность индексов кривых γ^+ и γ^- равна числу специальных точек на параболической кривой с учетом знаков:*

$$i(\gamma^-) - i(\gamma^+) = \sigma(\gamma)s(\gamma),$$

где $\sigma(\gamma)$ — разность между числом эллиптических и числом гиперболических специальных точек, а знак, s , равен $+1$, если параболическая кривая является внешней границей эллиптической области (-1 , если гиперболической).

СЛЕДСТВИЕ. *Для приведенных индексов $\tilde{i}(\gamma^-) - \tilde{i}(\gamma^+) = 2 + \sigma(\gamma)s(\gamma)$.*

ПРИМЕР. Для отображения $A(z) = \bar{z}^2 + 2z$ единственная параболическая кривая — окружность $|z| = 1$. Три специальные точки — отрицательные. В этом случае $i(\gamma^+) = 1$, $i(\gamma^-) = -2$, $\sigma = -3$, $s = +1$, $\tilde{i}(\gamma^+) = 0$, $\tilde{i}(\gamma^-) = -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Кривые $A(\gamma^-)$ и $A(\gamma^+)$ отличаются лишь малыми завитками, расположенными вблизи образов специальных точек (вблизи точек возврата каустики, т.е. кривой критических значений). Каждый завиток вносит в индекс вклад ± 1 . Завиток расположен на γ^+ , если специальная точка положительная, и на γ^- , если она отрицательная. Его вклад в индекс равен $-s$. Последнее нетрудно проверить, например, рассмотрев все четыре возможных случая (и используя описание локальной структуры отображения вблизи эллиптических и гиперболических специальных точек, приведенное выше: завиток образуется из кривой на той половине окрестности специальной точки, которая сильно растягивается). $\square$

Пусть связная компактная гиперболическая область M градиентного отображения плоскости имеет край $\partial M = \gamma_0 - \sum \gamma_j$ (γ_0 — внешняя, а γ_j — внутренние границы, ориентированные как края дисков). Обозначим через γ^+ малый сдвиг параболической кривой в эллиптическую область.

ТЕОРЕМА 7. *Приведенные индексы сдвинутых в эллиптические области краев гиперболической области градиентного отображения аддитивны: $\tilde{i}(\gamma_0^+) = \sum \tilde{i}(\gamma_j^+)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На дубле гиперболической области определено поле асимптотических направлений (нулей квадратичных форм d^2F). Особые точки представляют специальными точками границы. Эйлерова характеристика дубля равна $2 - 2n$, где n — число внутренних границ γ_j . Следовательно, сумма индексов особых точек поля на дубле есть $\sigma(\gamma_0) + \sum \sigma(\gamma_j) = 2 - 2n$.

Но, согласно следствию теоремы 6, $\tilde{i}(\gamma_0^+) = \tilde{i}(\gamma_0^-) - 2 + \sigma(\gamma_0)$ (так как $s(\gamma_0) = -1$) и $\tilde{i}(\gamma_j^+) = \tilde{i}(\gamma_j^-) - 2 - \sigma(\gamma_j)$ (так как $s(\gamma_j) = 1$). Окончательно мы получаем

$$\tilde{i}(\gamma_0^+) - \sum \tilde{i}(\gamma_j^+) = \left[\tilde{i}(\gamma_0^-) - \sum \tilde{i}(\gamma_j^-) \right] + \left[2n - 2 + \sigma(\gamma_0) + \sum \sigma(\gamma_j) \right].$$

Первая скобка равна нулю по теореме 5, а вторая — как только что доказано. $\square$

СЛЕДСТВИЕ. *Приведенные индексы сдвинутых в эллиптическую сторону параболических кривых градиентного отображения плоскости равны нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Назовем *рангом* параболической кривой число членов максимальной (самой длинной) цепочки последовательно вложенных друг в друга параболических кривых, начинающейся с заданной кривой (так что ранг параболической кривой, ограничивающей эллиптический или гиперболический диск, равен 1). Для кривых ранга 1, ограничивающих гиперболические диски, следствие сразу вытекает из теоремы 7 (внутренняя граница пуста). Для кривых ранга 1, ограничивающих эллиптические диски, оно вытекает из теоремы 5 (внутренняя граница опять пуста). Теорема 7 выражает приведенный индекс сдвинутой в эллиптическую область параболической кривой в виде суммы приведенных индексов сдвинутых в эллиптическую область кривых меньшего ранга, что и доказывает следствие по индукции. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Д. Панов и Ф. Аикарди, которым я сообщил приведенную теорию, заметили, что для любой кривой γ из эллиптической области градиентного отображения A числа оборотов касательных для кривых γ и $A(\gamma)$ совпадают. Это видно из того, что угол между векторами $\dot{\gamma}$ и $A_*\dot{\gamma}$ нигде не принимает значений $\pm\pi/2$ (поскольку скалярное произведение $(\dot{\gamma}, A_*\dot{\gamma})$ знакоопределено в эллиптической области).

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим градиентное отображение плоскости, гиперболическое вне достаточно большого круга. Теорема 7 показывает, что информация о внутреннем строении эллиптических областей не проходит через самые внешние параболические кривые. Ограничения, налагаемые поведением отображения вне большого круга на индексы и специальные точки, относятся только к самым внешним параболическим кривым и лежащим на них специальным точкам. Ограниченные этими кривыми области можно с этой точки зрения считать эллиптическими. Можно ли действительно перестроить F так, чтобы они стали эллиптическими, я не знаю.

Применим полученные результаты к типичному градиентному отображению плоскости, совпадающему вне некоторого большого круга с нетипичным отображением $A(z) = \bar{z}^2$ (с особенностью D_4^-).

ТЕОРЕМА 8. *Всякое градиентное отображение, совпадающее с A вне круга с центром в нуле, имеет на одной из своих внешних параболических кривых не менее трех специальных точек.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индекс большого круга $i(\gamma_0^-)$ равен -2 . Поэтому его приведенный индекс $\tilde{i}(\gamma_0^-)$ равен -1 . По теореме 5 он равен сумме приведенных индексов гиперболических сдвигов внешних параболических кривых γ_j , так что $\sum \tilde{i}(\gamma_j^-) = -1$. По следствию теоремы 6 $\tilde{i}(\gamma_j^-) = \tilde{i}(\gamma_j^+) + 2 + \sigma(\gamma_j)$ ($s(\gamma_j) = 1$, так как эта параболическая кривая ограничивает эллиптическую область). По следствию теоремы 7 $\tilde{i}(\gamma_j^+) = 0$. Итак, $\sum (2 + \sigma(\gamma_j)) = -1$. Значит, одно из слагаемых отрицательно. Сумма знаков специальных точек на соответствующей этому слагаемому внешней параболической кривой удовлетворяет неравенству $\sigma(\gamma_j) \leq -3$. Поэтому таких точек не меньше трех. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Более того, мы доказали, что на одной из внешних компонент число отрицательных специальных точек на три или более превосходит число

положительных. Оценка точна: для градиентной деформации $A(z) = \bar{z}^2 + \varepsilon z$, доставляемой версальной деформацией особенности D_4^- , специальных точек ровно три.

Можно предполагать (в соответствии с общим принципом топологической минимальности алгебраических объектов), что аналогичные неравенства имеют место и для других граничных условий: набор особенностей, на которые рассыпается вырожденная градиентная лагранжева особенность не общего положения при приводящей ее в общее положение малой градиентной деформации топологически необходим. Например, в двумерном случае число точек возврата каустики при любом ином продолжении функции, задающей вырожденную особенность, с окружающего особенность малого кольца на внутренний диск будет предположительно только большим, чем при общей малой деформации этой функции.

ПРИМЕР. Вырожденная особенность градиентного отображения $z \mapsto \bar{z}^m$ имеет стандартное малое градиентное возмущение $z \mapsto \bar{z}^m + \varepsilon z$ с одной параболической кривой и $m + 1$ (отрицательными) специальными точками на ней. Меньше их быть не может.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как выше, $i(\gamma_0) = -m$, $\tilde{i}(\gamma_0^-) = 1 - m$, $\sum \tilde{i}(\gamma_j^-) = 1 - m$, $\tilde{i}(\gamma_j^-) = \tilde{i}(\gamma_j^+) + 2 + \sigma(\gamma_j)$. Если $-\sigma(\gamma_j) < m + 1$ для каждой граничной компоненты, то $\sum \tilde{i}(\gamma_j^-) = \sum (2 + \sigma(\gamma_j)) > \sum (2 - m - 1) \geq 1 - m$, вопреки граничному условию $\sum \tilde{i}(\gamma_j^-) = 1 - m$. Значит, существует внешняя компонента, на которой $\sigma(\gamma_j) \leq -1 - m$. $\square$

Применим сказанное к исследованию финитных (сосредоточенных над аффинным диском) возмущений поверхности, которая на бесконечности (над дополнительным к диску листом Мёбиуса) всюду гиперболична и трансверсальна вертикальному направлению. Такую поверхность вблизи бесконечности можно задать, например, функцией

$$H(r, \varphi) = \cos 3\varphi + r \sin 2\varphi - cr^2 \cos \varphi, \quad 0 < c < 1/4, \quad (9)$$

в цилиндрических координатах §2.

Легко проверяются следующие свойства поля асимптотических направлений гиперболической на бесконечности поверхности, спроектированного вдоль вертикали на лист Мёбиуса.

1. Оба поля асимптотических направлений на листе Мёбиуса не смешиваются: одно из них ориентируемо, а другое — нет.

2. Число точек касания асимптотических направлений на листе Мёбиуса с бесконечно удаленной прямой не меньше трех, причем число точек касания с ориентируемым полем нечетно, а с неориентируемым четно.

Это вытекает из теоремы Мёбиуса, так как эти точки касания суть в точности проекции точек перегиба линии пересечения поверхности с проходящей через бесконечно удаленную прямую вертикальной плоскостью. Для существования трех таких точек достаточно, чтобы эта плоскость трансверсально пересекала поверхность по нестягиваемой гладкой кривой (возмущение может быть настолько большим, что возмущенная поверхность может не пересекать трансверсально вертикальные слои).

3. Рассмотрим тор, расслоенный над двулиственным накрытием бесконечно удаленной прямой на окружности касательных векторов единичной длины листа

Мёбиуса в точках бесконечно удаленной прямой. Это расслоение индуцировано из ограничения касательного расслоения единичных векторов листа Мёбиуса при отображении окружности на бесконечно удаленную прямую, накрывающем ее дважды.

Каждое из полей асимптотических направлений вдоль бесконечно удаленной прямой поднимается до сечения этого расслоения. *Индексы пересечения полученных кривых на торе с сечением, полученным поднятием направления бесконечно удаленной прямой, равны нулю.*

4. Вращения обоих полей асимптотических направлений на бесконечности удобно кодировать циклическими словами нечетной длины (равной суммарному числу точек касания обоих асимптотических направлений с бесконечно удаленной прямой) в алфавите из четырех символов $\cup$, $\cap$, $/$, $\backslash$. Символы соответствуют поворотам асимптотического репера между двумя последовательными точками касания на двулистно накрывающем лист Мёбиуса цилиндре в положительную ($/$) или отрицательную ($\backslash$) сторону по отношению к ориентации цилиндра (принесенной с аффинной части проективной плоскости). При этом после $\cup$ может идти только $\cap$ или $/$, после $\cap$ — только $\cup$ или $\backslash$, после $/$ — только $/$ или $\cap$, а после $\backslash$ — только $\backslash$ или $\cup$. Кроме того, *суммарное число символов $\cup$ и $\cap$ должно быть нечетным*, а две «змеи», получающиеся одна из другой инволюцией обращения, заменяющей все $\cup$ на $\cap$, $\cap$ на $\cup$, $/$ на $\backslash$ и $\backslash$ на $/$, отождествляются.

Например, имеются всего две допустимые змеи длины 3, $\cup\cap\cap$ и $\cap\backslash\backslash$. Числа допустимых змей длин $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$ даются, по моим подсчетам, странной последовательностью $1, 2, 4, 10, 30, 94, \dots$. Это — числа циклически упорядоченных разбиений нечетного числа n на нечетное число слагаемых.

ЗАМЕЧАНИЕ. Числа неупорядоченных разбиений чисел $n = 2k+1$ на нечетное число слагаемых образуют еще более странную последовательность $1, 2, 4, 8, 16, 29, \dots$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$). Если классифицировать разбиения по числу слагаемых, то получается треугольник, для которого я также не нашел общего закона:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & \\
 & & 1 & 4 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 7 & 5 & 2 & 1 & & \\
 1 & 10 & 10 & 5 & 2 & 1 & &
 \end{array}$$

По-видимому, все змеи с описанными свойствами реализуются полями асимптотических направлений подходящих гиперболических поверхностей на бесконечности, но я этого не доказал. Я не знаю также, как змея сказывается на числе параболических кривых гиперболической на бесконечности поверхности над аффинным диском — здесь были бы полезны компьютерные эксперименты.

Переходя с листа Мёбиуса, окружающего бесконечность, на дополнительный аффинный диск, мы получаем следующие граничные условия для полей асимптотических направлений ($d^2F = 0$) и для градиентного отображения ($A = \text{grad } F$).

А) Число оборотов любого из асимптотических направлений при обходе большого круга на аффинной плоскости равно $+1$ (если поверхность гипер-

болична на бесконечности). В частности, оба поля асимптотических направлений над этой окружностью ориентируемы.

Б) Число $i(\gamma_0^-)$ оборотов касательного вектора к образу $A\gamma_0^-$ края большого диска под действием градиентного отображения, заданного гиперболической на бесконечности поверхностью, всегда равно $+1$.

В) Число оборотов вектора ускорения $d^2A\gamma_0^-(\varphi)/(d\varphi)^2$ при положительном обходе края диска не меньше четырех.

Для нашего специального примера поверхности (9) это число равно 4. В этом примере кривая $A\gamma_0^-$, описываемая образом края $R = \text{const}$ большого диска, получается малым шевелением из гипоциклоиды с тремя остриями, пройденной дважды в отрицательном направлении. При шевелении три точки возврата подряд заменяются малыми петлями, а три последующих сглаживаются. Касательный вектор полученной кривой совершает $-2 + 3 = +1$ оборот при изменении φ от 0 до 2π .

Для кубических поверхностей число параболических кривых равно четырем, а число специальных точек — шести, причем все они отрицательные. Это согласуется с нашими предыдущими формулами:

$$\tilde{i}(\gamma_0^-) = \sum \tilde{i}(\gamma_j^-) = \sum (2 + \tilde{i}(\gamma_j^+) + \sigma(\gamma_j)) = 8 - 6 = 2 = i(\gamma_0^-) + 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. По-видимому, большое положительное значение индекса $i(\gamma)$ (где γ — охватывающая параболические кривые в гиперболической области кривая) влечет за собой наличие большого числа внешних параболических кривых у градиентного отображения. Это следовало бы из справедливости гипотезы Д. Панова, согласно которой индекс $i(\gamma^-)$ слабо сдвинутой во внешнюю для нее гиперболическую область параболической кривой не превосходит единицы. Д. Панов высказал эту гипотезу для пустых параболических кривых, ограничивающих эллиптические диски, но я не знаю контрпримеров и в общем случае. Эта гипотеза кажется связанной с тем, что 1) индекс особой точки градиентного векторного поля на плоскости не больше единицы, 2) связь градиентного направления с функцией конформно инвариантна, 3) любой диск конформно эквивалентен стандартному, 4) все специальные точки на выпуклой параболической кривой, ограничивающей эллиптическую область, отрицательны. Конечно, эти доводы не доказывают гипотезу, но попытка доказать ее, стягивая параболическую кривую в особую точку, кажется естественной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Segre B. The nonsingular cubic surfaces. Clarendon Press, Oxford, 1942.
2. Hurwitz A. Über die Fourieschen Konstanten integrierbarer Funktionen. Math. Ann., **57**, 425–446 (1903).
3. Арнольд В. И. Топологические вопросы теории распространения волн. УМН, **51**, вып. 1, 3–50 (1996).