Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Петров, О неколеблемости эллиптических интегралов, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 4, 47–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa491>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 07:14:30

О неколеблемости эллиптических интегралов

© 1997. Г. С. ПЕТРОВ

В. И. Арнольду к его шестидесятилетию

Рассмотрим эллиптический интеграл

$$\oint P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (1)$$

от вещественной полиномиальной 1-формы по вещественным овалам $y^2 + x^2 + x^4 = t$ на плоскости, $t > 0$.

В статье дается оценка числа нулей интеграла (1), рассматриваемого как функция от t . Оценка опирается на новое утверждение о неколеблемости линейной комбинации собственных функций линейного дифференциального оператора второго порядка (см. лемму 1 ниже).

К задаче об оценке числа нулей интеграла от вещественной полиномиальной формы по овалам уровня вещественного полинома сводится задача об оценке числа предельных циклов, рождающихся при возмущении гамильтонова полиномиального векторного поля.

Обозначим через $\mathcal{J}_n$ пространство интегралов (1) от вещественных полиномиальных 1-форм степени не выше n .

Основной результат статьи — это следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пространство $\mathcal{J}_n$ является чебышёвским на луче $t > 0$. Это означает, что число нулей (с учетом кратности) всякого интеграла из этого пространства (не равного тождественно нулю) меньше размерности самого пространства. Размерность пространства $\mathcal{J}_n$ равна $2[(n-1)/2] + 1$.*

Аналог этой теоремы для интегралов по овалам $y^2 + x^4 - x^2 = t$ был доказан ранее автором в работе [1]. Его доказательство применимо и для интегралов из теоремы 1. Здесь приводится другой (вещественный) вариант доказательства.

1. Схема доказательства теоремы 1. Доказательство теоремы 1 основано на следующем утверждении.

ЛЕММА 1. *Пусть f, g — непрерывные функции на интервале $I = (a, b)$ (возможно (полу)бесконечном), причем функция f положительна. Пусть $\lambda_1 < \dots < \lambda_k$ и существуют решения $y_1, \dots, y_k$ уравнений $\ddot{y}_i = (\lambda_i f(t) + g(t)) y_i$, обладающие следующими свойствами:*

- 1) y_1 нигде не обращается в нуль на I ;
- 2) $y_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow a$;
- 3) производные функций y_i ограничены в окрестности точки a .

Тогда пространство функций вида $\sum_{i=1}^k c_i y_i$ имеет размерность k и является чебышёвским.

Лемма 1 доказывается в конце статьи.

Первоначально эта лемма была сформулирована и доказана автором для случая $g = 0$, $f(t) = 1/(t(4t+1))$. Именно этот частный случай леммы используется при доказательстве теоремы 1. А. Г. Хованский заметил, что доказательство автора полностью остается в силе в условиях леммы 1 в общем случае. Отметим, что при $k = 2$ в предположении, что функции f и g непрерывно продолжаются в точку a , лемма 1 является частным случаем теоремы сравнения Штурма (см. ниже п. 4).

Мы покажем, что пространство $\mathcal{J}_n$ принадлежит классу чебышёвских пространств из леммы 1.

Справедливость теоремы 1 вытекает из леммы 1 и следующих трех утверждений.

ЛЕММА 2. В пространстве $\mathcal{J}_n$ имеется базис $\{y_i\}$, состоящий из решений уравнений второго порядка

$$\ddot{y}_i = \frac{\lambda_i}{t(4t+1)} y_i, \quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \dots \quad (2)$$

Решение y_1 положительно всюду.

Лемма 2 доказывается в следующем пункте.

ЛЕММА 3. Пространство $\mathcal{J}_n$ — это в точности пространство полиномиальных линейных комбинаций

$$I_0 P_0 + I_1 P_1$$

специальных эллиптических интегралов I_0 и I_1 от форм $\omega_0 = y dx$ и $\omega_1 = x^2 y dx$ с вещественными полиномами P_0 и P_1 степеней не выше $[(n-1)/2]$ и $[(n-1)/2] - 1$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Все интегралы (1) аналитически продолжаются нулем в точку $t = 0$.

Аналоги леммы 3 и предложения 1 для интегралов по овалам $y^2 + x^4 - x^2 = t$ содержатся в [1]. Доказательство применимо и для интегралов из пространства $\mathcal{J}_n$.

Для доказательства теоремы 1 осталось заметить, что базисные функции y_i из леммы 2 удовлетворяют условиям леммы 1 (лемма 2 и предложение 1). В силу леммы 1 пространство $\mathcal{J}_n$ является чебышёвским. Утверждение теоремы 1 о размерности этого пространства следует из леммы 3.

2. Доказательство леммы 2. Мы ищем базис $\{y_i\}$ в пространстве $\mathcal{J}_n$, удовлетворяющий утверждениям леммы 2. Уравнения на y_i означают, что они суть собственные функции оператора $L = t(4t+1) d^2/dt^2$.

Справедливость леммы 2 вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 4. Пространство $\mathcal{J}_n$ инвариантно относительно оператора L . Функция I_0 является его собственной функцией с отрицательным собственным значением. Остальные собственные значения оператора L на пространстве $\mathcal{J}_n$ положительны и попарно различны.

Лемма 4 доказывается в п. 3.

Искомый базис $\{y_i\}$ есть собственный базис оператора L с $y_1 = I_0$. Его существование следует из того, что собственные значения этого оператора попарно различны. Для завершения доказательства леммы 2 осталось заметить, что функция $I_0(t)$ положительна, так как равна площади области, ограниченной овалом уровня t . Лемма 2 доказана.

3. Доказательство леммы 4. Мы покажем, что в базисе из функций $I_0, I_1, tI_0, tI_1, \dots$ оператор L задается верхнетреугольной матрицей, у которой первый диагональный элемент отрицателен, а остальные положительны и попарно различны. Это докажет лемму 4: диагональные элементы верхнетреугольной матрицы суть ее собственные значения, а первая функция I_0 собственная.

При доказательстве утверждения из предыдущего абзаца будем использовать следующее свойство интегралов I_0, I_1 .

ЛЕММА 5.

$$I_0 = \frac{4}{3} tI'_0 - \frac{2}{3} I'_1, \quad I_1 = -\frac{2}{15} tI'_0 + \left(\frac{4}{5} t + \frac{4}{15}\right) I'_1. \quad (3)$$

Аналогичные уравнения для интегралов по овалам $y^2 + x^4 - x^2 = t$ содержатся в [1]. Они остаются в силе, когда интегралы берутся по произвольному семейству овалов на комплексных поверхностях уровня (например, по овалам, являющимся пересечением поверхности уровня с плоскостью $y \in \mathbb{R}, x \in i\mathbb{R}$). Уравнения леммы 5 получаются из этих уравнений после подстановки $x = ix'$.

Покажем вначале, что оператор L сохраняет пространство линейных комбинаций интегралов I_0, I_1 и в базисе I_0, I_1 задается матрицей

$$\begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 \\ 0 & 5/4 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Доказательство состоит в прямом вычислении значений оператора L на I_0 и I_1 . Дифференцируя уравнения (3) и перенося члены, содержащие I'_j , $j = 0, 1$, в левую часть, получаем

$$I'_0 = -4tI''_0 + 2I''_1, \quad \frac{2}{15} I'_0 + \frac{1}{5} I'_1 = -\frac{2}{15} tI''_0 + \left(\frac{4}{5} t + \frac{4}{15}\right) I''_1. \quad (5)$$

Подставляя правую часть первого уравнения вместо I'_0 во второе, получаем

$$I'_1 = 2tI''_0 + 4tI''_1. \quad (6)$$

Теперь выразим I_0, I_1 через их вторые производные. Для этого подставим формулы (5) и (6) для I'_0, I'_1 в уравнения (3). Имеем

$$I_0 = -\frac{4}{3} t(4t+1)I''_0 = -\frac{4}{3} LI_0, \\ I_1 = \frac{8}{15} t(4t+1)I''_0 + \frac{4}{5} t(4t+1)I''_1 = \frac{8}{15} LI_0 + \frac{4}{5} LI_1.$$

Отсюда следует доказываемое утверждение о действии L на I_0 и I_1 .

Теперь мы покажем, что L сохраняет флаг подпространств, отвечающий базису $I_0, I_1, tI_0, tI_1, \dots$ (и, таким образом, соответствующая матрица верхнетреугольная). Мы покажем, что диагональный элемент, отвечающий базисной функции $t^k I_0$ (функции $t^k I_1$) равен числу $-3/4 + k(4k+2)$ (соответственно числу $5/4 + k(4k+6)$). Все эти числа положительны за исключением $-3/4$ и, как легко проверить, попарно различны. Это докажет утверждение из начала п. 3.

Для доказательства вычислим значение оператора L на функции $t^k I_0$ (функции $t^k I_1$) с точностью до линейных комбинаций предшествующих ей базисных функций. Имеем

$$L(t^k I_j) = t^k L I_j + k(k-1)t(4t+1)t^{k-2} I_j + 2kt^k(4t+1)I'_j. \quad (7)$$

Проведем вычисление для $j = 0$. Сумма двух первых членов правой части в (7) равна (с указанной точностью) $(-3/4 + 4k(k-1))(t^k I_0)$ (см. (4)). Для вычисления последнего члена выразим $t(4t+1)I'_0$ через I_0 и I_1 , пользуясь первым из уравнений (5). Домножая это уравнение на $t(4t+1)$, получаем $t(4t+1)I'_0 = -4tL I_0 + 2L I_1$. Это равно $3tI_0$ по модулю линейной комбинации интегралов I_0, I_1 (см. (4)). Отсюда следует, что с точностью, указанной в начале абзаца, последний член правой части (7) равен $6kt^k I_0$, а значит, $L(t^k I_0)$ равно $(-3/4 + k(4k+2))t^k I_0$. Аналогично доказывается, что, с соответствующей точностью, $L(t^k I_1)$ равно $(5/4 + k(4k+6))t^k I_1$. Это доказывает утверждения из предыдущего абзаца. Лемма 4 доказана.

4. Доказательство леммы 1. Прежде всего покажем, что ни одна из собственных функций y_i нигде не обращается в нуль на I . Для $i = 1$ это одно из условий леммы. Для $i > 1$ это вытекает из неравенства $\lambda_i > \lambda_1$ и следующего варианта теоремы сравнения Штурма, примененного к y_1, y_i .

ТЕОРЕМА СРАВНЕНИЯ ШТУРМА. Пусть $F(t) < G(t)$ — непрерывные функции на интервале $I = (a, b)$ (возможно, (полу)бесконечном). Пусть y_1, y_2 — решения уравнений $\ddot{y}_1 = F(t)y_1, \ddot{y}_2 = G(t)y_2$, не равные тождественно нулю. Пусть функции y_i непрерывно продолжаются нулем в точку a , а их производные ограничены в ее окрестности. Тогда между любыми двумя нулями функции y_2 на $I \cup a$ лежит хотя бы один нуль функции y_1 .

Поскольку наш вариант теоремы сравнения Штурма чуть более общий, чем классический вариант [2], приведем полностью его доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что имеется пара нулей $c, d \in I \cup \{a\}$ функции y_2 , на интервале между которыми y_1 не обращается в нуль. Без ограничения общности можно считать, что $y_1, y_2 > 0$ на (c, d) . Пусть $W = y_1 \dot{y}_2 - y_2 \dot{y}_1$ — определитель Вронского пары функций y_1, y_2 . С одной стороны, на (c, d) вронсиан $W(t)$ строго возрастает: $\dot{W} = y_1 \ddot{y}_2 - y_2 \ddot{y}_1 = (G - F)y_1 y_2 > 0$. С другой стороны, как показывается ниже, $W(c) \geq 0 \geq W(d)$. (Мы считаем, что $W(a) = 0$: функция W непрерывно продолжается нулем в точку a в силу условия теоремы.) Полученное противоречие доказывает теорему.

Осталось лишь проверить неравенства из конца предыдущего абзаца. По предположению $y_2 = 0$ в точках c и d , и, таким образом, $W = y_1 \dot{y}_2$. Функция y_1 положительна на интервале (c, d) , а значит, ее значения в его концах неотрицательны. Это означает, что W принимает в каждой из них либо нулевое

значение, либо значения того же знака, что и $\dot{y}_2$. (Если $c = a$, то $W(c) = 0$.) Имеем $\dot{y}_2(d) < 0$, а при $c \in I$ выполняется неравенство $\dot{y}_2(c) > 0$. Это следует из того, что $y_2|_{(c,d)} > 0$ по предположению. Этим устанавливаются неравенства из предыдущего абзаца. Теорема Штурма доказана.

Для гладкой на интервале I функции q через $\#q|_I$ будем обозначать число ее нулей, посчитанных с учетом кратности.

ЛЕММА 6. 1. Для всякой гладкой функции q на интервале I справедливо неравенство $\#q|_I \leq \#q'|_I + 1$.

2. Если функция q стремится к нулю при стремлении аргумента к одному из концов интервала I , то справедливо неравенство $\#q|_I \leq \#q'|_I$.

Лемма 6 следует из теоремы Роля: между любыми двумя нулями функции лежит хотя бы один нуль производной.

Вернемся к доказательству леммы 1. Пусть $Y = \sum_{i \leq k} c_i y_i$ — нетривиальная линейная комбинация функций y_i . Обозначим через q частное

$$\frac{Y}{y_k} = c_k + \sum_{i \leq k} c_i \frac{y_i}{y_k}.$$

Нам надо доказать, что $\#q|_I \leq k$. В силу п. 1 из леммы 6 достаточно показать, что $\#q'|_I < k - 1$. Имеем

$$q' = \frac{h}{y_k^2}, \quad \text{где } h = \sum_{i < k} c_i (y_i' y_j - y_i y_j').$$

Таким образом, достаточно доказать аналогичную оценку для $\#h|_I$. Функция h непрерывно продолжается нулем в точку a (ограниченность производных y_i'). Поэтому, согласно п. 2 леммы 6,

$$\#h|_I \leq \#h'|_I. \quad (8)$$

Далее,

$$h' = \sum_{i < k} c_i (y_i'' y_j - y_i y_j'') = y_j f \sum_{i < k} c_i (\lambda_i - \lambda_j) y_i.$$

Сумма в правой части последнего равенства есть линейная комбинация $k - 1$ функций y_i , $i < k$. По индукции она либо тождественно равна нулю, либо имеет менее $k - 1$ нулей. Лемма 1 доказана.

Я благодарен Ю. С. Ильяшенку и А. Г. Хованскому за полезные замечания, а также А. А. Глуцкоу за помощь при подготовке статьи к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Г. С. Эллиптические интегралы и их неколеблемость. Функциональный анализ и его прил., **20**, вып. 1, 46–49 (1986).
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Изд. 7-е, М., 1958.