Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Сахнович, О схеме Сарасона в матричном случае, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 4, 52–59

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa492>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:09:44

О схеме Сарасона в матричном случае

© 1997. Л. А. САХНОВИЧ

*Статья посвящается Владимиру Игоревичу
Арнольду в связи с его шестидесятилетием*

Введение

Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства. Через $\{H_1, H_2\}$ обозначим класс ограниченных линейных операторов, действующих из H_1 в H_2 . Мы рассмотрим следующую задачу.

ЗАДАЧА 1. Пусть операторы S_- и A принадлежат классу $\{H, H\}$ и перестановочны, т. е.

$$AS_- = S_-A. \quad (0.1)$$

Требуется описать множество матриц-функций $\Psi(z)$ порядка $m \times m$, таких, что верно равенство

$$S_- = \Psi(A). \quad (0.2)$$

Точное определение $\Psi(A)$, т. е. матрицы-функции с операторным аргументом, будет дано далее.

Задача 1 для скалярного случая ($m = 1$) была сформулирована и исследована в известной работе Д. Сарасона [1]. В этой же работе Сарасон показал, как связана задача 1 при $m = 1$ с задачами интерполяции. Дальнейшее развитие результаты Сарасона получили в ряде работ (см. [2, 3]). В данной статье мы переходим от скалярного случая к матричному ($m \geq 1$). Такой переход позволяет существенно расширить класс операторов A , S_- , для которых верно представление (0.2). Заметим, что понятие матрицы-функции с операторным аргументом является новым. Определению этого понятия посвящен §1. В §2 изложены результаты теории интерполяции, используемые в статье. В §3 выводится формула (0.2) в матричном случае ($m \geq 1$).

Отметим также, что формула (0.2) оказывается полезной в задачах классической треугольной факторизации (§4).

§1. Матрица-функция с операторным аргументом

Будем предполагать далее, что оператор A является сжатием и

$$\dim(E - AA^*)H = m < \infty. \quad (1.1)$$

Тогда для некоторого гильбертова пространства G ($\dim G = m$) существует такой оператор $\Phi_2 \in \{G, H\}$, что

$$E - AA^* = \Phi_2 \Phi_2^*. \quad (1.2)$$

Без ограничения общности можно считать, что G состоит из векторов-столбцов g со скалярным произведением

$$(g_1, g_2) = g_2^* g_1.$$

В силу (0.1) и (1.2) верно равенство

$$S_1 - AS_1A^* = \Phi_1\Phi_1^*, \quad (1.3)$$

где

$$S_1 = S_- S_-^*, \quad \Phi_1 = S_- \Phi_2. \quad (1.4)$$

Из соотношений (1.2), (1.3) следует операторное тождество [4, 5]

$$S - ASA^* = \Phi_2\Phi_2^* - \Phi_1\Phi_1^*, \quad (1.5)$$

где

$$S = E - S_1. \quad (1.6)$$

Наряду с тождеством (1.5) рассмотрим класс аналитических в круге $|z| < 1$ матриц-функций

$$\Psi(z) = a_0 + a_1 z + \dots \quad (1.7)$$

порядка $m \times m$, таких, что выполнено неравенство

$$\|\Psi(z)\| \leq 1, \quad |z| < 1, \quad (1.8)$$

и $\lambda = 1$ не является собственным числом матрицы $\Psi(z)$ при $|z| < 1$. Тогда имеет смысл матрица

$$F_1(z) = -(\Psi(z) + E)(\Psi(z) - E)^{-1}.$$

Функцию $\Psi(z)$ можно представить в виде

$$\Psi(z) = (E + F_1(z))^{-1}(F_1(z) - E), \quad (1.9)$$

причем

$$F_1(z) + F_1^*(z) \geq 0, \quad |z| < 1. \quad (1.10)$$

Как известно [4], $F_1(z)$ допускает представление Рисса–Герглотца

$$F_1(z) = i\alpha + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + ze^{i\varphi}}{1 - ze^{i\varphi}} d\tau(\varphi), \quad (1.11)$$

где $\alpha = \alpha^*$, а $\tau(\varphi)$ — монотонно возрастающая матрица-функция порядка $m \times m$, причем

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\tau(\varphi) < \infty. \quad (1.12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть A — оператор сжатия из класса $\{H, H\}$, такой, что ни одна точка из его спектра не лежит на окружности $|z| = 1$, а аналитическая функция $F_1(z)$ задана формулой (1.11). Тогда соответствующая функция $F_1(A)$ с операторным аргументом A определяется равенством

$$F_1(A)\Phi = i\Phi\alpha + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (E + Ae^{i\varphi})(E - Ae^{i\varphi})^{-1}\Phi d\tau(\varphi), \quad (1.13)$$

где $\alpha = \alpha^*$, а Φ — оператор из класса $\{G, H\}$.

Заметим, что матрицы α и $\tau(\varphi)$ определяют операторы из класса $\{G, G\}$.

Из (1.13) следует, что $F_1(A)$ переводит операторы из класса $\{G, H\}$ в операторы из этого же класса, т.е. $F_1(A)$ является трансформатором в классе $\{G, H\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Сходимость интеграла, стоящего в правой части формулы (1.13), следует из неравенства (1.12).

Таким образом, введенная функция $F_1(A)$ отображает операторы из класса $\{G, H\}$ в операторы этого же класса, причем выполняется свойство перестановочности

$$A^k F_1(A) = F_1(A) A^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

Введем скалярное произведение при помощи формулы

$$(F_1(A)\Phi, \Phi) = \text{Tr}\{\Phi^* F_1(A)\Phi\}. \quad (1.15)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Если ни одна точка из спектра оператора сжатия A не лежит на окружности $|z| = 1$ и $F_1(z)$ имеет вид (1.11), то справедливо неравенство

$$\text{Re}(F_1(A)\Phi, \Phi) \geq 0. \quad (1.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим величину

$$P = ((E + e^{i\varphi}A)(E - e^{i\varphi}A)^{-1}\Phi\gamma, \Phi), \quad (1.17)$$

где $\gamma \in \{G, G\}$, $\gamma \geq 0$, $\Phi \in \{G, H\}$. Формулу (1.17) запишем в следующем виде:

$$P = \text{Tr} \sqrt{\gamma} \Phi^* (E + e^{i\varphi}A)(E - e^{i\varphi}A)^{-1} \Phi \sqrt{\gamma}.$$

Значит, верно равенство

$$\text{Re} P = \text{Tr} (\sqrt{\gamma} \Phi^* (E - e^{i\varphi}A)^{-1} (E - AA^*) (E - e^{-i\varphi}A^*)^{-1} \Phi \sqrt{\gamma}),$$

откуда вытекает неравенство

$$\text{Re} P \geq 0. \quad (1.18)$$

Так как интегральную часть выражения $F_1(A)\Phi$ можно аппроксимировать суммами слагаемых вида $(E + e^{i\varphi}A)(E - e^{i\varphi}A)^{-1}\Phi\gamma$, то из (1.18) следует неравенство (1.16).

Предложение доказано.

Из предложения 1.1 следует, что оператор $E + F_1(A)$ обратим. Тогда имеет смысл функция с операторным аргументом

$$\Psi(A) = (E + F_1(A))^{-1}(F_1(A) - E). \quad (1.19)$$

§2. Операторные тождества и задачи интерполяции

В работах [5–7] рассматривались следующие операторные тождества:

$$AS - SA^* = i(\Phi_1\Phi_2^* + \Phi_2\Phi_1^*), \quad (2.1)$$

$$S - ASA^* = \Phi_1\Phi_2^* + \Phi_2\Phi_1^*, \quad (2.2)$$

где $A, S \in \{H, H\}$, $\Phi_1, \Phi_2 \in \{G, H\}$, $\dim G = m < \infty$. Этим тождествам ставились в соответствие интерполяционные задачи. В данном параграфе мы переформулируем результаты статей [5–7] для случая, когда операторное тождество имеет вид (1.5).

ЗАДАЧА 2.1 (интерполяционная задача). Пусть операторы A, S, Φ_1, Φ_2 связаны соотношением (1.5). Требуется найти монотонно возрастающую матрицу-функцию $\tau(\varphi)$ ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$) порядка $m \times m$ и самосопряженную матрицу α , такие, что верны формулы

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (E - e^{i\varphi} A)^{-1} (\Phi_1 - \Phi_2) d\tau(\varphi) (\Phi_1^* - \Phi_2^*) (E - e^{-i\varphi} A)^{-1}, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (E - e^{i\varphi} A)^{-1} (-\Phi_1 + \Phi_2) d\tau(\varphi) \\ + (-\Phi_1 + \Phi_2) \left(i\alpha - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau(\varphi) \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решению $\tau(\varphi)$ и α сформулированной интерполяционной задачи поставим в соответствие матрицу-функцию

$$F(\zeta) = -i\alpha + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\varphi} - \zeta)(e^{i\varphi} + \zeta)^{-1} d\tau(\varphi). \quad (2.5)$$

Введенная матрица-функция $F(\zeta)$ является позитивной, т. е.

$$F(\zeta) + F^*(\zeta) \geq 0, \quad |\zeta| < 1. \quad (2.6)$$

Значит, матрица-функция

$$w(\zeta) = (F(\zeta) - E_m)(F(\zeta) + E_m)^{-1} \quad (2.7)$$

удовлетворяет условию

$$\|w(\zeta)\| \leq 1, \quad |\zeta| < 1. \quad (2.8)$$

Построенную матрицу-функцию $w(\zeta)$ мы также будем называть *решением задачи 2.1*. Действительно формулы (2.5), (2.7) позволяют по $w(\zeta)$ найти $\tau(\varphi)$ и α .

Полагая

$$\Pi = [\Phi_1, \Phi_2], \quad j = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_m \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

перепишем тождество (1.5) в виде

$$S - ASA^* = \Pi(-j)\Pi^*. \quad (2.10)$$

Введем теперь матрицу-функцию

$$\mathfrak{A}(\zeta) = \begin{bmatrix} a(\zeta) & b(\zeta) \\ c(\zeta) & d(\zeta) \end{bmatrix} = E_{2m} - (\zeta_0 - \zeta)\Pi^*(\zeta E + A^*)^{-1}S^{-1}(E + \zeta_0 A)^{-1}\Pi j, \quad (2.11)$$

где $a(\zeta)$, $b(\zeta)$, $c(\zeta)$, $d(\zeta)$ имеют размер $m \times m$, а ζ_0 — фиксированное число ($|\zeta_0| = 1$).

Результаты статьи [6] допускают следующую переформулировку в терминах тождества (1.5).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены следующие условия:

- (1) справедливо тождество (1.5);
- (2) оператор S положителен и обратим;
- (3) $(\Phi_1 - \Phi_2)g \neq 0$ при $g \neq 0$ ($g \in G$).

Тогда матрица-функция $w(\zeta)$ является решением интерполяционной задачи 2.1 в том и только в том случае, когда $w(\zeta)$ допускает представление

$$w(\zeta) = (a(\zeta) \mathcal{P}(\zeta) + b(\zeta) \mathcal{Q}(\zeta))(c(\zeta) \mathcal{P}(\zeta) + d(\zeta) \mathcal{Q}(\zeta))^{-1}, \quad (2.12)$$

где $\mathcal{P}(\zeta)$, $\mathcal{Q}(\zeta)$ — мероморфные матрицы-функции порядка $m \times m$, такие, что

$$\det(\mathcal{P}^*(\zeta) \mathcal{P}(\zeta) + \mathcal{Q}^*(\zeta) \mathcal{Q}(\zeta)) \neq 0, \quad (2.13)$$

$$-\mathcal{P}^*(\zeta) \mathcal{P}(\zeta) + \mathcal{Q}^*(\zeta) \mathcal{Q}(\zeta) \geq 0, \quad |\zeta| < 1. \quad (2.14)$$

§3. Матричный вариант формулы Сарасона

Из результатов §§1, 2 выводим следующее утверждение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть выполнены соотношения (1.1)–(1.6) и (1.9)–(1.12) и ни одна точка из спектра оператора A не лежит на окружности $|z| = 1$. Тогда равенство

$$S_- \Phi_2 = \Psi(A) \Phi_2 \quad (3.1)$$

верно в том и только в том случае, когда функция

$$w(z) = \Psi^*(-\bar{z}) \quad (3.2)$$

является решением интерполяционной задачи, соответствующей тождеству (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулу Рисса–Герглотца (2.5) можно записать в виде

$$F(\zeta) = \left(-i\alpha - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau(\varphi) \right) + \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \zeta e^{-i\varphi})^{-1} d\tau(\varphi).$$

Тогда выполняется равенство

$$F_1(\zeta) = F^*(-\bar{\zeta}) = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \zeta e^{i\varphi})^{-1} d\tau(\varphi) + \left(i\alpha + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau(\varphi) \right). \quad (3.3)$$

Сопоставляя (2.4) и (3.3), имеем

$$\Phi_1 + \Phi_2 = F_1(A)(-\Phi_1 + \Phi_2),$$

откуда выводим соотношение

$$\Phi_1 = \Psi(A) \Phi_2, \quad (3.4)$$

где

$$\Psi(\zeta) = (E + F_1(\zeta))^{-1}(-E + F_1(\zeta)). \quad (3.5)$$

В силу (3.3)

$$w(\zeta) = (E + F(\zeta))^{-1}(-E + F(\zeta)), \quad (3.6)$$

т.е. $w(\zeta)$ является решением соответствующей интерполяционной задачи, причем справедливо равенство (3.2). Утверждение теоремы следует теперь из равенства (3.4) и соотношения $\Phi_1 = S_- \Phi_2$ (см. (1.4)).

Обозначим через H_1 замкнутую линейную оболочку подпространств $A^k \Phi_2 G$ ($k = 0, 1, \dots$).

В силу (3.1)

$$S_- A^k \Phi_2 g = \Psi(A) A^k \Phi_2 g, \quad g \in G,$$

т.е. при $h_k = A^k \Phi_2 g$ имеем

$$S_- h_k = \Psi(A) h_k.$$

Значит, справедливо соотношение

$$S_- h = \Psi(A) h, \quad h \in H_1.$$

Из последнего равенства в случае $H_1 = H$ вытекает, что

$$S_- = \Psi(A). \quad (3.7)$$

Таким образом, приведенные выкладки показывают, что $\Psi(A)$ можно рассматривать не только как трансформатор в классе $\{G, H\}$, но также как оператор в классе $\{H, H\}$, т.е. равенство (3.7) корректно.

Сформулируем теперь итоговый результат.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия предложения 3.1 и $H_1 = H$. Равенство (3.7) верно в том и только в том случае, когда функция $w(z) = \Psi^*(-\bar{z})$ является решением интерполяционной задачи, соответствующей тождеству (1.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В работе Сарасона [1] найдены условия существования представления (3.7) в скалярном случае ($m = 1$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Напомним, что необходимым условием разрешимости интерполяционной задачи, соответствующей тождеству (1.5), является неравенство $S = E - S_1 \geq 0$, т.е. $0 \leq S_1 \leq E$. Значит, в силу равенства $S_1 = S_- S_-^*$ необходимым условием существования представления (3.7) является неравенство

$$\|S_-\| \leq 1. \quad (3.8)$$

§4. Факторизующая формула

Пусть заданы операторы A и S_1 , действующие в гильбертовом пространстве H и такие, что

$$E - AA^* \geq 0, \quad \dim(E - AA^*)H = m < \infty, \quad (4.1)$$

$$S_1 - AS_1A^* \geq 0, \quad \dim(S_1 - AS_1A^*)H \leq m. \quad (4.2)$$

Тогда существуют такие операторы $\Phi_1, \Phi_2 \in \{G, H\}$, $\dim G = m$, что

$$E - AA^* = \Phi_2 \Phi_2^*, \quad (4.3)$$

$$S_1 - AS_1A^* = \Phi_1 \Phi_1^*. \quad (4.4)$$

Снова запишем операторное тождество

$$S - ASA^* = \Phi_2 \Phi_2^* - \Phi_1 \Phi_1^*, \quad (4.5)$$

где

$$S = E - S_1, \quad 0 \leq S_1 \leq E. \quad (4.6)$$

Наши выкладки повторяют выкладки предыдущего параграфа. Разница состоит в том, что начали мы теперь с введения оператора S_1 , а не оператора S_- .

Снова через H_1 обозначим замкнутую линейную оболочку подпространств $A^k \Phi_2 G$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть выполнены соотношения (4.1)–(4.4), точки окружности $|z| = 1$ не принадлежат спектру оператора A и $H_1 = H$. Если матрица-функция*

$$w(z) = \Psi^*(-\bar{z})$$

является решением интерполяционной задачи, соответствующей тождеству (4.5), то

$$S_1 = S_- S_-^*, \quad (4.7)$$

где

$$S_- = \Psi(A). \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу интерполяционной формулы (3.4) имеем

$$\Phi_1 = S_- \Phi_2, \quad (4.9)$$

причем

$$AS_- = S_- A. \quad (4.10)$$

Умножая равенство (4.3) слева на S_- , а справа на S_-^* и учитывая соотношения (4.9), (4.10), получаем

$$S_- S_-^* - AS_- S_-^* A^* = \Phi_1 \Phi_1^*. \quad (4.11)$$

Вычитая (4.11) из (4.4), имеем

$$(S_1 - S_- S_-^*) - A(S_1 - S_- S_-^*)A^* = 0. \quad (4.12)$$

В силу условий теоремы уравнение

$$X - AXA^* = 0$$

имеет лишь тривиальное решение, т. е. справедливо равенство (4.7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Будем говорить, что оператор S_1 допускает A -факторизацию, если верны формулы (4.7), (4.8).

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Тогда оператор S_1 допускает A -факторизацию.*

Таким образом, формула (4.8) дает метод построения A -факторизующего оператора S_- .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В конкретных задачах из A -факторизации обычно следует классическая треугольная факторизация.

ПРИМЕР 4.1. Пусть оператор A имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ E_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Тогда

$$E - AA^* = \Phi_2 \Phi_2^*, \quad (4.14)$$

где

$$\Phi_2 = \text{col}[E_m, 0, \dots, 0] \in \{G, H\}, \quad \dim G = m. \quad (4.15)$$

Пусть оператор S_1 таков, что

$$S_1 - AS_1A^* \geq 0, \quad \text{rank}(S_1 - AS_1A^*) \leq m. \quad (4.16)$$

Тогда существует такой оператор $\Phi_1 \in \{G, H\}$, что $S_1 - AS_1A^* = \Phi_1 \Phi_1^*$. Рассмотренный пример удовлетворяет всем условиям теоремы 4.1. Значит, оператор S_1 допускает A -факторизацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sarason D. Generalized Interpolation in H^∞ . Trans. Am. Math. Soc., **127**, No. 2, 179–203 (1967).
2. Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г. Об ограниченных операторах, коммутирующих со сжатием класса C_{∞} единичного класса неунитарности. Функц. анализ и его прил., **3**, вып. 3, 86–87 (1969).
3. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. Наука, М., 1980.
4. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. Физматгиз, М., 1961.
5. Иванченко Т. С., Сазнович Л. А. Операторный подход к схеме В. П. Потапова исследования интерполяционных задач. Укр. мат. ж., **39**, № 5, 573–578 (1987).
6. Иванченко Т. С., Сазнович Л. А. Операторные тождества в теории интерполяционных задач. Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., **22**, № 3, 298–308 (1987).
7. Сазнович Л. А. Метод операторных тождеств и проблемы анализа. Алгебра и анализ, **5**, вып. 1, 3–80 (1993).

Украинская государственная
академия связи им. А. С. Попова

Поступило в редакцию
27 ноября 1996 г.