Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Скубачевский, О нормальности некоторых
эллиптических функционально-
дифференциальных операторов, *Функц. анализ и
его прил.*, 1997, том 31, выпуск 4, 60–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa493>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:34:47

УДК 517.95

О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов*

© 1997. А. Л. СКУБАЧЕВСКИЙ

1. Общая теория эллиптических функционально-дифференциальных операторов рассматривалась в [1]. В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов. Эти условия играют важную роль в исследовании нелинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений [2]. Отметим, что указанные уравнения возникают в нелинейной оптике [3, 4].

2. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, $n \geq 2$. Пусть g — преобразование класса C^3 , отображающее ограниченную область $V \subset \mathbb{R}^n$ ($\bar{Q} \subset V$) на $g(V)$ так, что $|J_g(x)| \neq 0$ ($x \in V$) и

$$g(Q) \subset Q, \quad (1)$$

где $J_g(x) = (\partial g_i / \partial x_j)$ ($i, j = 1, \dots, n$) — матрица Якоби, $|J_g(x)| = |\det J_g(x)|$.

Рассмотрим неограниченный оператор $A_0: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(A_0) = \{v \in W_2^2(Q) : Bv = 0\}$, действующий по формуле $A_0 v = \Delta v$ ($v \in \mathcal{D}(A_0)$). Здесь $W_2^k(Q)$ — пространство Соболева комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(Q)$ вместе со всеми обобщенными производными до порядка k включительно, $Bv = v|_{\partial Q}$ или $Bv = (\partial v / \partial \nu)|_{\partial Q}$, ν — единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке $x \in \partial Q$. Как известно, A_0 — самосопряженный оператор. Положим $A = A_0 + A_1$, где $A_1: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ — линейный ограниченный оператор, определенный по формуле $A_1 v(x) = av(g(x))$, $a \neq 0$ — вещественное число.

Оператор A называется нормальным, если $\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A)$ и $AA^*v = A^*Av$ ($v \in \mathcal{D}(A^*A)$).

Пусть $G_m = \{x \in Q : g^m(x) \neq x\}$ ($m = 1, 2, \dots$).

Основными результатами данной работы являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $G_2 \neq \emptyset$. Тогда для нормальности оператора $A: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$g(Q) = Q, \quad g(x) = Kx + b \quad (x \in Q), \quad (2)$$

где K — ортогональная матрица порядка $n \times n$ и $K^2 \neq E$, $b \in \mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G_2 = \emptyset$. Тогда для нормальности оператора $A: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$g(Q) = Q, \quad |J_g(x)| \equiv 1 \quad (x \in Q). \quad (3)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00247) и завершена во время посещения автором Математического института в Обервольфахе, Германия (в марте 1997 г.).

Более того, если A — нормальный оператор, то он является самосопряженным.

3. Для доказательства теорем 1 и 2 приведем некоторые вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. *Сопряженный оператор $A_1^*: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ определяется по формуле*

$$A_1^*v(x) = \begin{cases} a|J_{g^{-1}}(x)|v(g^{-1}(x)) & \text{при } x \in g(Q), \\ 0 & \text{при } x \in Q \setminus g(Q), \end{cases} \quad (4)$$

где $J_{g^{-1}}(x)$ — матрица Якоби преобразования g^{-1} .

Доказательство очевидно.

ЛЕММА 2. *Пусть $A: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ — нормальный оператор. Тогда $g(Q) = Q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: $Q \setminus g(Q) \neq \emptyset$. Тогда существует шар $S_{2\delta}(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < 2\delta\}$, такой, что

$$\overline{S_{2\delta}(x^0)} \subset Q \setminus g(\overline{Q}). \quad (5)$$

Следовательно,

$$g(S_{2\delta}(x^0)) \cap S_{2\delta}(x^0) = \emptyset. \quad (6)$$

Введем функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, такую, что $0 \leq \xi(x) \leq 1$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi(x) = 1$ при $x \in S_\delta(x^0)$ и $\text{supp } \xi \subset S_{2\delta}(x^0)$. Из условия (1) следует, что $\xi \in \mathcal{D}(AA^*)$. Поскольку A — нормальный оператор, мы имеем $\xi \in \mathcal{D}(A^*A)$.

Из леммы 1, соотношения (5) и определения функции $\xi(x)$ получим

$$A_1 A_1^* \xi(x) = a^2 |J_{g^{-1}}(g(x))| \quad (x \in S_\delta(x^0)), \quad (7)$$

$$A_1^* A_1 \xi(x) = 0, \quad A_1^* A_0 \xi(x) = 0 \quad (x \in S_\delta(x^0)), \quad (8)$$

$$A_0^2 \xi(x) = 0, \quad A_0 A_1^* \xi(x) = 0 \quad (x \in S_\delta(x^0)). \quad (9)$$

В силу (6) и определения функции $\xi(x)$ имеем

$$A_0 A_1 \xi(x) = 0, \quad A_1 A_0 \xi(x) = 0 \quad (x \in S_\delta(x^0)). \quad (10)$$

Из (7)–(10) вытекает, что

$$(A_0 + A_1)(A_0 + A_1^*)\xi(x) = a^2 |J_{g^{-1}}(g(x))| \quad (x \in S_\delta(x^0)),$$

$$(A_0 + A_1^*)(A_0 + A_1)\xi(x) = 0 \quad (x \in S_\delta(x^0)).$$

Таким образом, оператор A не является нормальным. Полученное противоречие доказывает, что $g(Q) = Q$. $\square$

ЛЕММА 3. *Пусть $g(Q) = Q$ и $|J_{g^{-1}}(x)| = |J_{g^{-1}}(g(x))|$ ($x \in Q$).*

Тогда A_1 — нормальный оператор.

Доказательство следует из леммы 1.

4. Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.

ЛЕММА 4. *Пусть A — нормальный оператор, и пусть $G_2 \neq \emptyset$. Тогда*

$$g(x) = Kx + b \quad (x \in Q), \quad (11)$$

где K — ортогональная матрица порядка $n \times n$, $K^2 \neq E$, $b \in \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Очевидно, что множества G_m ($m = 1, 2$) открытые и $G_2 \subset G_1$. Пусть $x^0 \in G_2$. Тогда $x^0 \neq g(x^0)$, $g^{-1}(x^0) \neq g(x^0)$. Следовательно, существует $\delta > 0$, такое, что $\overline{S_{2\delta}(x^0)} \subset G_2$, $S_{2\delta}(x^0) \cap g(S_{2\delta}(x^0)) = \emptyset$ и $g^{-1}(S_{2\delta}(x^0)) \cap g(S_{2\delta}(x^0)) = \emptyset$.

Введем функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ так, что $0 \leq \xi(x) \leq 1$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi(x) = 1$ при $x \in g(S_\delta(x^0))$ и $\text{supp } \xi \subset g(S_{2\delta}(x^0))$. Положим $u = \xi P$, где P — некоторый многочлен. Очевидно, что $u \in \mathcal{D}(A^*A)$. По условию оператор A нормальный. Поэтому в силу определения функции $\xi(x)$

$$A_0 A_1 u(x) = A_1 A_0 u(x) \quad (x \in S_\delta(x^0)).$$

Следовательно,

$$\Delta u(g(x)) = (\Delta u)(g(x)) \quad (x \in S_\delta(x^0)). \quad (12)$$

Дифференцируя сложную функцию $u(g(x))$, из (12) получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{r,s=1}^n u_{g_r g_s}(g(x)) g_{r x_i}(x) g_{s x_i}(x) + \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n u_{g_r}(g(x)) g_{r x_i x_i}(x) \\ = \sum_{r=1}^n u_{g_r g_r}(g(x)) \quad (x \in S_\delta(x^0)). \end{aligned} \quad (13)$$

Полагая $P(x)$ равным $(x_k - g_k(x^0))^2$, $(x_k - g_k(x^0))(x_m - g_m(x^0))$ ($k \neq m$), $(x_k - g_k(x^0))$, из (13) получаем

$$\sum_{i=1}^n g_{k x_i}^2(x^0) = 1 \quad (k = 1, \dots, n), \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^n g_{k x_i}(x^0) g_{m x_i}(x^0) = 0 \quad (k, m = 1, \dots, n, k \neq m), \quad (15)$$

$$\Delta g_k(x^0) = 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (16)$$

II. Равенства (14), (15) можно записать в матричном виде:

$$J_g(x^0) J_g^T(x^0) = E. \quad (17)$$

Следовательно,

$$J_g^T(x^0) J_g(x^0) = E. \quad (18)$$

Запишем (18) в координатной форме:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x_k} \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x_m} = \delta_{km}.$$

Дифференцируя это равенство по x_l , имеем

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g_i(x^0)}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x_m} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x_k} \frac{\partial^2 g_i(x^0)}{\partial x_l \partial x_m} = 0. \quad (19)$$

Циклически переставляя в (19) индексы k, l, m , получим

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g_i(x^0)}{\partial x_m \partial x_k} \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x_m} \frac{\partial^2 g_i(x^0)}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g_i(x^0)}{\partial x_l \partial x_m} \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x_l} \frac{\partial^2 g_i(x^0)}{\partial x_m \partial x_k} = 0. \quad (21)$$

Складывая равенства (19), (20) и вычитая (21), приходим к равенству

$$2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g_i(x^0)}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x_m} = 0 \quad (k, l, m = 1, \dots, n).$$

Таким образом, для произвольных фиксированных k, l мы получим систему линейных однородных алгебраических уравнений с определителем $|J_g(x^0)| \neq 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 g_i(x^0)}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \quad (i, k, l = 1, \dots, n).$$

Поэтому $g_i(x)$ — линейная функция переменных $x_1, \dots, x_n$, т. е.

$$g(x) = K_j x + b^j \quad (x \in G_{2j}), \quad (22)$$

где G_{2j} — открытая связная компонента множества G_2 . В силу равенства (17) матрица K_j ортогональная.

III. Положим $G_0 = Q \setminus G_2$. По лемме 2 имеем $g(Q) = Q$. Поэтому в силу определения множеств G_0, G_2 получим $g(G_0) = G_0, g(G_2) = G_2$. Следовательно, если $x \in G_{2j}$, то $g(x) \in G_{2m}$ для некоторого $m = m(j)$. Кроме того, в силу связности множества G_{2j} индекс m не зависит от x . Таким образом,

$$g^2(x) = K_m K_j x + K_m b^j + b^m \quad (x \in G_{2j}). \quad (23)$$

Рассмотрим сначала случай $G_2 = Q$. Тогда j принимает единственное значение $j = 1$. Предположим, что $K_1^2 = E$. Тогда $g^2(x) = x + K_1 b^1 + b^1$ ($x \in Q$). Отсюда получим $K_1 b^1 + b^1 = 0$. Следовательно, $g^2(x) \equiv x$ ($x \in Q$). Это противоречит условию $G_2 = Q$. Таким образом, если $G_2 = Q$, то $g(x)$ имеет вид (11), где $K = K_1, K^2 \neq E$.

Предположим теперь, что $G_0 \neq \emptyset$. Тогда $\partial G_2 \cap Q = \partial G_0 \cap Q \neq \emptyset$. Рассмотрим множество $\partial G_2 \cap Q$. Пусть $z \in \partial G_{2j} \cap Q$. Тогда, переходя в (23) к пределу при $x \rightarrow z$ ($x \in G_{2j}$), получаем

$$K_m K_j z + K_m b^j + b^m = z. \quad (24)$$

Если $K_m K_j = E$, то $K_m b^j + b^m = 0$. Тогда $g^2(x) \equiv x$ ($x \in G_{2j}$). Это противоречит определению множества G_{2j} . Следовательно, множество $\partial G_{2j} \cap Q$ принадлежит гиперплоскости размерности $r \leq n - 1$, где r — кратность собственного значения $\lambda = 1$ матрицы $K_m K_j$. Если $\lambda = 1$ не является собственным значением матрицы $K_m K_j$, то множество $\partial G_{2j} \cap Q$ состоит из одной точки. По условию $g \in C^3$. С другой стороны, $g^2(x)$ — кусочно линейная функция в Q . Поэтому $G_0 \subset \partial G_2$. Таким образом, $g(x)$ также является кусочно линейной функцией

в Q . Значит, $g(x)$ ($x \in Q$) имеет вид (11). При этом, так как $K_j = K_m = K$, то $r \leq n - 2$, а множество G_2 состоит из одной компоненты. $\square$

ЛЕММА 5. Пусть $G_2 \neq \emptyset$, $g(Q) = Q$ и $g(x)$ имеет вид (11). Тогда оператор A нормален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\mathcal{D}(A) = \{u \in W_2^2(Q) : Bu = 0\}$. Следовательно, из условия леммы вытекает, что $A_1 u, A_1^* u \in \mathcal{D}(A)$, если $u \in \mathcal{D}(A)$. Поэтому по теореме о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений вблизи границы [5, гл. 2, § 5, теорема 5.1] мы получим

$$\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A) = \{u \in W_2^4(Q) : Bu = B\Delta u = 0\}.$$

В силу леммы 3 остается доказать, что

$$A_0 A_1 u + A_1^* A_0 u = A_1 A_0 u + A_0 A_1^* u \quad (u \in \mathcal{D}(AA^*)). \quad (25)$$

Из условия леммы следует, что равенства (14)–(16) тождественно выполняются в области Q . Следовательно,

$$A_0 A_1 u = A_1 A_0 u \quad (u \in \mathcal{D}(AA^*)). \quad (26)$$

С другой стороны, $g^{-1}(y) = K^{-1}y - K^{-1}b$. Поскольку K^{-1} также является ортогональной матрицей, из равенств (14)–(16) и тождества $|J_{g^{-1}}(x)| \equiv 1$ ($x \in Q$) мы получим

$$A_0 A_1^* u = A_1^* A_0 u \quad (u \in \mathcal{D}(AA^*)). \quad (27)$$

Из (26), (27) следует (25). $\square$

Доказательство теоремы 1 вытекает из лемм 2, 4, 5.

5. Перейдем к доказательству теоремы 2.

ЛЕММА 6. Пусть A — нормальный оператор, и пусть $G_2 = \emptyset$. Тогда $|J_g(x)| \equiv 1$ ($x \in Q$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку оператор A нормален,

$$\mathcal{D}((A_0 + A_1)(A_0 + A_1^*)) = \mathcal{D}((A_0 + A_1^*)(A_0 + A_1)), \quad (28)$$

$$(A_0 + A_1)(A_0 + A_1^*)\xi = (A_0 + A_1^*)(A_0 + A_1)\xi \\ (\xi \in \mathcal{D}((A_0 + A_1^*)(A_0 + A_1))). \quad (29)$$

Для произвольной точки $x^0 \in G_1$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\overline{S_{2\delta}(x^0)} \subset Q$ и $\overline{S_{2\delta}(x^0)} \cap \overline{g(S_{2\delta}(x^0))} = \emptyset$. Введем срезающую функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы $0 \leq \xi(x) \leq 1$, $\xi(x) = 1$ ($x \in S_\delta(x^0)$) и $\text{supp } \xi \subset S_{2\delta}(x^0)$. Очевидно, что $\overline{g^{-1}(S_{2\delta}(x^0))} \subset Q$. Поэтому $\xi \in \mathcal{D}((A_0 + A_1^*)(A_0 + A_1))$.

Из равенства (29), определения функции $\xi(x)$ и тождества $g^2(x) \equiv x$ ($x \in Q$) следует, что $a^2 |J_{g^{-1}}(g(x))| = a^2 |J_{g^{-1}}(x)|$ ($x \in S_\delta(x^0)$). Отсюда в силу произвольности выбора точки x^0 имеем

$$|J_{g^{-1}}(g(x))| = |J_{g^{-1}}(x)| \quad (x \in G_1). \quad (30)$$

С другой стороны, в силу свойств якобианов

$$|J_g(x)| \cdot |J_{g^{-1}}(g(x))| \equiv 1 \quad (x \in Q). \quad (31)$$

Из (30), (31) и тождества $g^2(x) \equiv x$ следует, что

$$|J_g(x)| \equiv 1 \quad (x \in G_1). \quad (32)$$

Если теперь произвольная точка $y \in Q \setminus G_1$ является граничной точкой множества G_1 , то, переходя к пределу в (32), мы получим $|J_g(y)| = 1$. По определению $Q \setminus G_1 = \{y \in Q : g(y) = y\}$. Поэтому, если $y \in Q \setminus G_1$ — внутренняя точка множества $Q \setminus G_1$, то $|J_g(y)| = 1$.

Таким образом, $|J_g(x)| \equiv 1$ ($x \in Q$). $\square$

ЛЕММА 7. Пусть $G_2 = \emptyset$, $g(Q) = Q$ и $|J_g(x)| \equiv 1$ ($x \in Q$). Тогда A — самосопряженный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий леммы 7 и из леммы 1 следует, что $A_1 = A_1^*$. А поскольку оператор A_0 самосопряженный, то оператор A также самосопряженный. $\square$

Доказательство теоремы 2 вытекает из лемм 2, 6, 7.

6. Из теорем 1, 2 легко получить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Ортонормированный базис в $L_2(Q)$, состоящий из собственных функций оператора A , существует тогда и только тогда, когда в случае $G_2 \neq \emptyset$ выполняется условие (2), а в случае $G_2 = \emptyset$ выполняется условие (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что оператор A имеет компактную резольвенту в $L_2(Q)$. Поэтому из теоремы об операторе с компактной резольвентой [6, гл. III, § 6, теорема 6.29] и теоремы о свойствах ограниченных нормальных операторов [7, гл. 12, теорема 12.29] следует, что существование ортонормированного базиса в $L_2(Q)$, состоящего из собственных функций оператора A , эквивалентно нормальности оператора A . Таким образом, утверждение теоремы 3 вытекает из теорем 1, 2. $\square$

Автор глубоко благодарен М. С. Аграновичу, С. Б. Куksину и В. В. Трофимову за обсуждение работы и ряд ценных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Skubachevskii A. L. Elliptic functional differential equations and applications. Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.
2. Скубачевский А. Л. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений. УМН, **51**, вып. 1, 169–170 (1996).
3. Vorontsov M. A., Iroshnikov N. G., Abernathy R. L. Diffractive patterns in a nonlinear optical two-dimensional feedback systems with field rotation. Chaos, Solitons, and Fractals, **4**, 1701–1716 (1994).
4. Razgulin A. V. Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback. In: Chaos in Optics, Rajarshi Roy ed., Proceedings SPIE, Vol. 2039, 1993, pp. 342–352.
5. Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Мир, М., 1971.
6. Kato T. Теория возмущений линейных операторов. Мир, М., 1972.
7. Рудин У. Функциональный анализ. Мир, М., 1975.