Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Аржанцев, О нормальности замыканий сферических орбит, *Функци. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 4, 66–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa494>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:09:40

О нормальности замыканий сферических орбит^{*}

© 1997. И. В. АРЖАНЦЕВ

Пусть X — нормальное алгебраическое многообразие, G — редуктивная группа, действующая на X регулярными автоморфизмами, и B — борелевская подгруппа в G . Основное поле k считаем алгебраически замкнутым и $\text{char}(k) = 0$. Сложностью действия $G:X$ называют коразмерность B -орбиты общего положения на X или, что эквивалентно, степень трансцендентности поля рациональных B -инвариантов $k(X)^B$. Действия сложности нуль называют сферическими. Примером сферического действия служит действие алгебраического тора, у которого имеется открытая орбита. Такие действия называются торическими. Известно [1], что на торическом многообразии замыкание всякой орбиты нормально. Аналогичный результат известен и для произвольного сферического многообразия. В этой работе мы докажем нормальность замыканий орбит для некоторого класса действий сложности один.

ТЕОРЕМА. *Пусть связная редуктивная группа G действует на нормальном аффинном многообразии X со стабилизатором общего положения H , сложность этого действия равна единице и категорный фактор $X//G$ одномерен. Тогда замыкание всякой G -орбиты в X нормально.*

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Теорема справедлива и для неаффинных алгебраических многообразий, если условие $\dim X//G = 1$ заменить на условие существования одномерного хорошего в смысле Мамфорда фактора.

2) Покажем, что условия теоремы ослабить нельзя. В случае однопараметрического семейства орбит сложности один рассмотрим действие группы SL_2 в бинарных формах степени три. Здесь орбита общего положения изоморфна SL_2/Z_3 , фактором является прямая, нуль-конус есть замыкание орбиты формы x^2y и это замыкание не является нормальным. Для вложения однородного пространства сложности один подходит предыдущий пример, если рассматривать действие группы GL_2 . В случае однопараметрического семейства сферических орбит при условии, что $\dim X//G = 0$, рассмотрим действие одномерного тора на плоскости, заданное формулой $(x, y) \rightarrow (t^2x, t^3y)$. Для двухпараметрического семейства сферических орбит с двумерным фактором можно рассмотреть действие одномерного тора в трехмерном пространстве $(x, y, z) \rightarrow (t^{-1}x, t^2y, t^3z)$.

3) Для линейного представления связной полупростой группы с одномерным фактором алгебра инвариантов есть кольцо многочленов от одной переменной, и порождающий эту алгебру многочлен неприводим. Последнее означает неприводимость нуль-конуса такого представления. Поэтому из теории этального слайса следует, что если в условиях теоремы группа G полупроста, а многообразие X неособо, то всякий слой морфизма факторизации, содержащий неподвижную точку, нормален.

^{*} Работа выполнена при финансовой поддержке ISSEP, грант a96-423, и CRDF, грант RM1-206.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. 1. Предположим, что на X имеется открытое G -инвариантное подмножество, изоморфное $U \times G/H$, где U — гладкая кривая с тривиальным действием группы G . Такие действия $G:X$ мы называем бирационально тривиальными. В работе [3] показано, что в этом случае найдется такое открытое аффинное покрытие $\{U_i\}$ кривой $C = X//G$, что для всякого i имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\phi} & S_i \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_1 \\ U_i & \xrightarrow{\phi_1} & A^1 \end{array}$$

причем морфизмы ϕ и ϕ_1 этальны и $\pi^{-1}(U_i)$ есть обратный образ S_i . Здесь S_i — вложение однородного сферического пространства $k^* \times G/H$ группы $k^* \times G$, а π и π_1 — морфизмы факторизации по группе G . Таким образом, замыкание всякой G -орбиты на X изоморфно замыканию соответствующей G -орбиты на некотором S_i . Всякая неприводимая компонента слоя морфизма факторизации для X (и для S_i) содержит плотную сферическую орбиту [2]. Покажем, что каждая такая компонента нормальна. Слой $\pi_1^{-1}(a)$, $a \neq 0$, нормален и неприводим как слой общего положения, см. [3]. Если K — компонента слоя $\pi_1^{-1}(0)$, то K является замыканием некоторой $k^* \times G$ -орбиты на сферическом многообразии и потому нормальна. Итак, всякая компонента есть сферическое G -многообразие, откуда следует утверждение теоремы. В частности, теорема доказана для действия тора, так как известно, что всякое действие тора бирационально тривиально.

2. Для произвольного действия $G:X$ рассмотрим многообразие $Y = \text{Срес}(k[X]^U)$, где U — максимальная унипотентная подгруппа в G . Имеется естественное действие максимального тора T группы G на Y , причем $X//G \cong C \cong Y//T$. Согласно критерию нормальности Луны–Вуста, нормальность многообразия X эквивалентна нормальности многообразия Y . Действие $T:Y$ удовлетворяет условиям теоремы, и поэтому достаточно доказать, что алгебра U -инвариантов на неприводимой компоненте Z_i слоя Z морфизма $\pi: X \rightarrow C$ T -изоморфна алгебре регулярных функций на некоторой неприводимой компоненте $\tilde{Z}_i$ слоя $\tilde{Z}$ морфизма $\tilde{\pi}: Y \rightarrow C$. Пусть $k[Z]$ — приведенная алгебра функций на слое. Ясно, что $k[Z]^U$ есть приведенная алгебра функций на соответствующем слое $\tilde{Z}$. Разложению на неприводимые компоненты соответствует задание в алгебре $k[Z]$ набора минимальных простых идеалов $I_1, \dots, I_k$, удовлетворяющего условию $I_1 \cap \dots \cap I_k = \{0\}$. Переходя к алгебре U -инвариантов, получаем $I_1^U \cap \dots \cap I_k^U = \{0\}$. Несложно проверить, что $I_1^U, \dots, I_k^U$ — минимальные простые идеалы алгебры $k[Z]^U$ и что $(k[Z]/I_j)^U = k[Z]^U/I_j^U$. Теорема доказана.

Пусть редуктивная группа G действует на аффинном многообразии X . Множество X^{sp} точек, орбиты которых сферичны, замкнуто в X [2]. Пусть замыкание некоторой орбиты из X^{sp} не является нормальным. Если включить эту орбиту в однопараметрическое семейство орбит той же размерности в X^{sp} и

если замыкание этого семейства содержит более одной замкнутой орбиты, то из теоремы следует, что это замыкание также не нормально.

ПРИМЕР 1. Пусть V_d — пространство бинарных форм степени d с естественным действием группы SL_2 . Рассмотрим SL_2 -модуль $V = A_1 \oplus \dots \oplus A_l \oplus V_{2d_1} \oplus \dots \oplus V_{2d_k}$, где A_i — одномерные тривиальные SL_2 -модули. Заметим, что для всякого действия группы SL_2 стабилизатор общего положения существует. Рассмотрим множество $L = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_l, \alpha_{l+1}x^{d_1}y^{d_1}, \dots, \alpha_{l+k}x^{d_k}y^{d_k})\}$, где $(\alpha_1, \dots, \alpha_{l+k})$ принадлежат некоторой кривой C в $(l+k)$ -мерном пространстве. Пусть $X = \overline{SL_2 L}$. Так реализуется всякое трехмерное аффинное многообразие со стабильным нетранзитивным SL_2 -действием. Пусть имеется неподвижная точка $x = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_l^0, 0, \dots, 0)$ на X . Если кривая C задана явно, можно найти орбиту, содержащую x в своем замыкании. Она имеет вид $SL_2(\alpha_1^0, \dots, \alpha_l^0, \alpha_{l+1}^0 x^{2d_1}, \dots, \alpha_{l+p}^0 x^{2d_p}, 0, \dots, 0)$ после подходящей перенумерации координат. Если $d_i > \text{НОД}(d_1, \dots, d_p)$ для всех $i = 1, \dots, p$, то замыкание этой орбиты не нормально и потому не нормально все многообразие X .

ПРИМЕР 2. В работе Р. Ричардсона [6, Sec. 10] исследовалась нормальность замыкания G -орбиты прямой из максимального тора в пространстве присоединенного представления простой группы G . Предложение 10.2 этой работы утверждает, что в случае $G = SO_n$, $n = 2k + 1$, для прямой общего положения такое замыкание нормально. Приведем пример прямой L в соответствующей алгебре, для которой $\overline{GL}$ не нормально. Пусть $L = \langle h_{\varepsilon_k} \rangle$ — прямая, натянутая на полупростой элемент h_{ε_k} , см. [7, с. 158], и предположим, что $k = 2l + 1$. Тогда в замыкании орбиты этой прямой лежит орбита нильпотентного элемента, соответствующего жордановым блокам размеров $(3, 2, \dots, 2)$. Орбита такого элемента сферична [8, th. 4.4] и потому сферичны все орбиты ее пласта. Замыкание этой орбиты не нормально [9, Sec. 3.4, 16.2]. Поэтому не нормально и замыкание орбиты прямой L . Заметим, что, согласно [6, прор. 10.3], конус $\pi^{-1}(\pi(L))$, где π — морфизм факторизации для присоединенного представления, нормален и является многообразием Коэна–Маколея. В частности, для $\overline{GL}$ выполнено необходимое условие нормальности Ричардсона [6] и поэтому методами этой работы ненормальность замыкания орбиты прямой L установить нельзя.

К сожалению, нашим методом не удастся доказывать нормальность однопараметрических семейств сферических орбит.

ПРИМЕР 3. Пусть одномерный тор действует на поверхности $x^2 = yz^3$ по формуле $(x, y, z) \rightarrow (tx, t^2y, z)$. Тогда все слои морфизма факторизации и фактор нормальны и суть аффинные прямые, однако сама поверхность не нормальна.

В заключение перечислим все линейные группы из двух указанных ниже классов, удовлетворяющих условию теоремы.

Неприводимые представления полупростых групп: SO_n , S^2SL_n , Λ^2SL_{2k} , $Spin_7$, $Spin_9$, G_2 , E_6 , $SL_n \otimes SL_n$, $SL_2 \otimes Sp_n$, $SL_4 \otimes Sp_4$.

Приводимые представления простых групп: $SL_n \oplus SL'_n$, $SL_n \oplus \Lambda^2SL_n$, $SL'_{2k} \oplus \Lambda^2SL_{2k}$, где $'$ означает сопряженное представление.

Можно также проверить, что приводимое представление простой группы не может быть сферическим. Список неприводимых действий получается из теоремы 3 работы [4], а нужные нам приводимые представления простых групп можно найти, используя таблицы Элашвили [5].

Автор благодарит Э. Б. Винберга и Д. И. Панюшеву за внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kempf G., Knudson F., Mumford D., Saint-Donat B.* Toroidal Embeddings. Lect. Notes in Math., Vol. 339, Springer-Verlag, 1973.
2. *Аржанцев И. В.* Известия РАН, сер. матем., **61**, № 4, 3–18 (1997).
3. *Аржанцев И. В.* Матем. сб., **188**, № 5, 3–20 (1997).
4. *Kac V. G.* J. Algebra, **64**, 190–213 (1980).
5. *Элашвили А. Г.* Функц. анализ и его прил., **6**, вып. 1, 51–62 (1972).
6. *Richardson R. W.* In: Lect. Notes in Math., Vol. 1271, 1987, p. 243–264.
7. *Винберг Э. Б., Онищук А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. Наука, М., 1988.
8. *Panyushev D. I.* Manuscripta Math., **83**, 223–237 (1994).
9. *Kraft H., Procesi C.* Comment. Math. Helvetici, **57**, 539–602 (1982).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
17 марта 1997 г.

УДК 517.956.227

О сходимости следа степени оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на сфере S^n *

© 1997. А. Н. БОБРОВ, В. Е. ПОДОЛЬСКИЙ

Рассмотрим оператор Лапласа–Бельтрами Δ_0 на сфере S^n из R^{n+1} . Обозначим через $\Delta = \Delta_0 + (n-1)^2/4$ нормализованный оператор Лапласа–Бельтрами, а через q оператор умножения на комплекснозначную бесконечно дифференцируемую функцию на S^n . Пусть $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ и $\{\mu_k\}_{k=0}^\infty$ — собственные числа операторов $-\Delta$ и $-\Delta + q$ соответственно, занумерованные с учетом кратности в порядке возрастания их действительных частей. Спектр оператора $-\Delta$ на S^n хорошо известен [1]: это точки $\lambda_{ki} = (k + (n-1)/2)^2$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, N_k$, где $N_k \sim ck^{n-1}$. Для собственных чисел оператора $-\Delta + q$ мы будем также использовать двойную нумерацию μ_{ki} , согласованную с нумерацией λ_{ki} .

В работах [2–5] В. Гийемин детально изучил спектр оператора $-\Delta + q$ на M , где M — симметрическое пространство ранга 1 (см., например [1]) и $q \in C^\infty(M)$, и показал, в частности, что оценка $|\mu_{ki} - \lambda_{ki}| = O(1)$, $i = 1, \dots, N_k$, получаемая методами теории возмущений [6, с. 271], не может быть улучшена при вещественнозначных $q \neq \text{const}$ ни для каких M , кроме сферы S^n . Более того, в [3] показано, что множество предельных точек последовательности $\mu_{ki} - \lambda_{ki}$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, N_k$, есть отрезок $[a, b]$ вещественной оси, и для a и b предъявлены формулы, выражающие их через q . Кроме того, в [4] для всех $n \neq 2$, а в [7] для $n = 2$ показано, что для сферы S^n эта оценка может быть улучшена лишь для нечетных функций q до $|\mu_{ki} - \lambda_{ki}| = O(k^{-2})$, $i = 1, \dots, N_k$, и O можно заменить на o только для $q \equiv 0$.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 96-15-96049).