Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Бобров, В. Е. Подольский, О сходимости следа степени оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на сфере S^n , *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 4, 69–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa495>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:06:42

Автор благодарит Э. Б. Винберга и Д. И. Панюшеву за внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kempf G., Knudson F., Mumford D., Saint-Donat B.* Toroidal Embeddings. Lect. Notes in Math., Vol. 339, Springer-Verlag, 1973.
2. *Аржанцев И. В.* Известия РАН, сер. матем., **61**, № 4, 3–18 (1997).
3. *Аржанцев И. В.* Матем. сб., **188**, № 5, 3–20 (1997).
4. *Kac V. G.* J. Algebra, **64**, 190–213 (1980).
5. *Элашвили А. Г.* Функц. анализ и его прил., **6**, вып. 1, 51–62 (1972).
6. *Richardson R. W.* In: Lect. Notes in Math., Vol. 1271, 1987, p. 243–264.
7. *Винберг Э. Б., Онищук А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. Наука, М., 1988.
8. *Panyushev D. I.* Manuscripta Math., **83**, 223–237 (1994).
9. *Kraft H., Procesi C.* Comment. Math. Helvetici, **57**, 539–602 (1982).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
17 марта 1997 г.

УДК 517.956.227

О сходимости следа степени оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на сфере S^n *

© 1997. А. Н. БОБРОВ, В. Е. ПОДОЛЬСКИЙ

Рассмотрим оператор Лапласа–Бельтрами Δ_0 на сфере S^n из R^{n+1} . Обозначим через $\Delta = \Delta_0 + (n-1)^2/4$ нормализованный оператор Лапласа–Бельтрами, а через q оператор умножения на комплекснозначную бесконечно дифференцируемую функцию на S^n . Пусть $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ и $\{\mu_k\}_{k=0}^\infty$ — собственные числа операторов $-\Delta$ и $-\Delta + q$ соответственно, занумерованные с учетом кратности в порядке возрастания их действительных частей. Спектр оператора $-\Delta$ на S^n хорошо известен [1]: это точки $\lambda_{ki} = (k + (n-1)/2)^2$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, N_k$, где $N_k \sim ck^{n-1}$. Для собственных чисел оператора $-\Delta + q$ мы будем также использовать двойную нумерацию μ_{ki} , согласованную с нумерацией λ_{ki} .

В работах [2–5] В. Гийемин детально изучил спектр оператора $-\Delta + q$ на M , где M — симметрическое пространство ранга 1 (см., например [1]) и $q \in C^\infty(M)$, и показал, в частности, что оценка $|\mu_{ki} - \lambda_{ki}| = O(1)$, $i = 1, \dots, N_k$, получаемая методами теории возмущений [6, с. 271], не может быть улучшена при вещественнозначных $q \neq \text{const}$ ни для каких M , кроме сферы S^n . Более того, в [3] показано, что множество предельных точек последовательности $\mu_{ki} - \lambda_{ki}$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, N_k$, есть отрезок $[a, b]$ вещественной оси, и для a и b предъявлены формулы, выражающие их через q . Кроме того, в [4] для всех $n \neq 2$, а в [7] для $n = 2$ показано, что для сферы S^n эта оценка может быть улучшена лишь для нечетных функций q до $|\mu_{ki} - \lambda_{ki}| = O(k^{-2})$, $i = 1, \dots, N_k$, и O можно заменить на o только для $q \equiv 0$.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 96-15-96049).

Таким образом, относительно асимптотического распределения собственных чисел оператора $-\Delta + q$ получены окончательные результаты, и дальнейшее исследование расположения спектра возможно только «в среднем». Стандартным аппаратом для этого являются различные формулы регуляризованных следов.

Первым шагом в этом направлении была работа [8], где для сферы S^2 и нечетного потенциала q была предъявлена формула регуляризованного следа со скобками. Позже, в работе [9] было доказано, что скобки в этом случае можно снять. При этом существенную роль сыграло использование метода суммирования регуляризованных следов по Абелю [10] с последующим применением тауберовой техники.

Далее в работе [11] для всех симметрических пространств M ранга 1 и оператора $-\Delta + q$ были получены формулы следов со скобками всех порядков и следов первого порядка, просуммированных по Абелю. Наконец, в работе [12] были получены формулы следов произвольного (в том числе нецелого) порядка, просуммированные по Абелю.

В настоящей работе детально изучается вопрос о сходимости (абсолютной и условной) регуляризованных следов для степеней собственных чисел оператора $-\Delta + q$ на S^n .

Рассмотрим регуляризованный след порядка α оператора $-\Delta + q$ на сфере S^n вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\mu_k^{\alpha} - \lambda_k^{\alpha} - \sum_j \chi_j(\alpha) \lambda_k^{k_j(\alpha)} \right). \quad (1)$$

При $\alpha = 0$ ряд (1) становится тривиальным и в дальнейшем не рассматривается. Основным результатом работы являются две следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1. Пусть комплекснозначный потенциал q является нечетным. Тогда имеются следующие возможности:

1. При $(4-n)/2 \leq \alpha < (5-n)/2$ и $n \neq 5$ существуют константы $\chi_1(\alpha)$, $\chi_2(\alpha)$, такие, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k^{\alpha} - \lambda_k^{\alpha} - \chi_1(\alpha) \lambda_k^{-2+\alpha} - \chi_2(\alpha) \lambda_k^{-5/2+\alpha}) \quad (2)$$

условно сходится, а в случае сферы S^5 при любом $1/2 \geq \delta > 0$ существуют константы $\eta_1(\alpha, \delta)$, $\eta_2(\alpha, \delta)$, такие, что регуляризованный след

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k^{\alpha} - \lambda_k^{\alpha} - \eta_1(\alpha, \delta) \lambda_k^{-2+\alpha} - \eta_2(\alpha, \delta) \lambda_k^{-5/2+\alpha}) \quad (3)$$

условно сходится при $-1/2 \leq \alpha < -\delta$.

2. При $\alpha < (4-n)/2$ регуляризованный след (1) сходится абсолютно, т. е. сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k^{\alpha} - \lambda_k^{\alpha}|. \quad (4)$$

Более того, для вещественнозначного нечетного потенциала q верны следующие утверждения:

3. При $\alpha \geq (5 - n)/2$ не существует регуляризации по собственным числам невозмущенного оператора $-\Delta$, т. е. для любого набора констант $\chi_j(\alpha)$ и степеней $k_j(\alpha)$ ряд (1) расходится.

4. При $\alpha \geq (4 - n)/2$ регуляризованный след (1) не может сходиться абсолютно, т. е. для любого набора констант $\chi_j(\alpha)$ и степеней $k_j(\alpha)$ ряд, составленный из модулей членов ряда (1), расходится.

ТЕОРЕМА 2. Пусть комплекснозначный потенциал q не является нечетным; тогда имеются следующие возможности:

1. При $(2 - n)/2 \leq \alpha < (3 - n)/2$ и $n \neq 5$ существуют константы $\chi_1(\alpha)$, $\chi_2(\alpha)$, такие, что ряд (2) сходится условно, а в случае сферы S^5 при любом $3/2 \geq \delta > 1$ существуют константы $\eta_1(\alpha, \delta)$, $\eta_2(\alpha, \delta)$, такие, что регуляризованный след (3) условно сходится при $-3/2 \leq \alpha < -\delta$.

2. При $\alpha < (2 - n)/2$ регуляризованный след (1) сходится абсолютно, т. е. сходится ряд (4).

Более того, для вещественнозначного потенциала q , не являющегося нечетным, верны следующие утверждения:

3. При $\alpha \geq (3 - n)/2$ не существует регуляризации по собственным числам невозмущенного оператора $-\Delta$, т. е. для любого набора констант $\chi_j(\alpha)$ и степеней $k_j(\alpha)$ ряд (1) расходится.

4. При $\alpha \geq (2 - n)/2$ регуляризованный след (1) не может сходиться абсолютно, т. е. для любого набора констант $\chi_j(\alpha)$ и степеней $k_j(\alpha)$ ряд, составленный из модулей членов ряда (1), расходится.

Отметим, что константы $\chi_1(\alpha)$, $\chi_2(\alpha)$ и $\eta_1(\alpha, \delta)$, $\eta_2(\alpha, \delta)$ можно вычислить явно. В частности,

$$\chi_1(\alpha) = \frac{(2\pi)^{n-1}(n-1)!}{8} \alpha \vartheta, \quad \chi_2(\alpha) = \frac{(2\pi)^{n-1}(n-1)!(4n-n^2-3)}{16} \alpha \vartheta, \quad (5)$$

где

$$\vartheta = \int_{S^*S^n} \frac{1}{|\xi|^2} \left(\int_0^{2\pi} (\exp t\Xi)^* q^2 dt - |\xi| \int_0^{2\pi} dt \int_0^t \{(\exp t\Xi)^* q, (\exp s\Xi)^* q\} ds \right) dv.$$

Здесь Ξ — гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении $T^*S^n \setminus \{0\}$, определяемое римановой структурой на S^n , $q(x, \xi)$ — функция на $T^*S^n \setminus \{0\}$, связанная с потенциалом по формуле $q(x, \xi) = q(x)$ для всех (x, ξ) , $\{\cdot, \cdot\}$ — скобки Пуассона и dv — элемент симплектического объема на расслоении единичных косфер.

Суммы рядов (2) и (3) эффективно вычисляются через аналитическое продолжение дзета-функции оператора $-\Delta + q$. Так для суммы ряда (2) верно соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha - \chi_1(\alpha) \lambda_k^{-2+\alpha} - \chi_2(\alpha) \lambda_k^{-5/2+\alpha}) \\ &= \operatorname{Reg}_{s=\alpha} Z(s) - \sum_{l=1}^n p_l \operatorname{Reg}_{s=\alpha} \left[\zeta \left(l - n - 2s, \frac{n-1}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \chi_1(\alpha) \zeta \left(l + 4 - n - 2s, \frac{n-1}{2} \right) + \chi_2(\alpha) \zeta \left(l + 5 - n - 2s, \frac{n-1}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

где $Z(s)$ — дзета-функция оператора $-\Delta + q$, а $\zeta(s, a)$ — обобщенная дзета-функция Римана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Требование вещественнозначности потенциала q для утверждений о расходимости соответствующих рядов является существенным, так как в работе [13] построен пример такого комплекснозначного потенциала q , что спектры операторов $-\Delta + q$ и $-\Delta$ совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. Мир, М., 1980.
2. Guillemin V. Adv. in Math., **28**, 129–137 (1978).
3. Guillemin V. Adv. in Math., **28**, 138–147 (1978).
4. Guillemin V. Adv. in Math., **27**, 273–286 (1978).
5. Guillemin V. Adv. in Math., **42**, 248–282 (1981).
6. Kamo T. Теория возмущений линейных операторов. Мир, М., 1972.
7. Widom H. Adv. in Math., **31**, 63–66 (1979).
8. Садовничий В. А., Дубровский В. В. ДАН СССР, **319**, вып. 1, 61–62 (1991).
9. Подольский В. Е. Матем. заметки, **56**, вып. 1, 71–77 (1994).
10. Любишкин В. А., Подольский В. Е. Матем. заметки, **54**, вып. 2, 33–37 (1993).
11. Podol'skii V. E. Russian J. Math. Phys., **4**, No. 1, 123–130 (1996).
12. Бобров А. Н. Дифференциальные уравнения, **33**, вып. 6, 433–438 (1997).
13. Guillemin V., Uribe A. Trans. Am. Math. Soc., **279**, No. 2, 759–771 (1983).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
16 апреля 1997 г.

УДК 517.5

Аналог формулы следа для дискретных операторов Штурма–Лиувилля с асимптотически N -периодическими коэффициентами

© 1997. Б. П. ОСИЛЕНКЕР

Пусть

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \{a_{n+1}, b_n\} \quad (n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}) \quad (1)$$

— бесконечная якобиева (трехдиагональная) симметричная матрица с $a_{n+1} > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}^1$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Обозначим через $\mathcal{L}$ дискретный оператор Штурма–Лиувилля, порожденный разностным выражением

$$(Lu)_n = a_{n+1}u_{n+1} + b_nu_n + a_nu_{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+, u_{-1} = 0),$$

где $u = (u_n)_{n=0}^\infty \in l^2$ [1, с. 506–507]. Задача на собственные значения определяет ортогональные полиномы первого рода $\{p_n(\lambda)\}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), заданные трехчлен-