Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Попов, О замкнутости некоторых орбит алгебраических групп, *Функци. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 4, 76–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa496>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 18:32:52

О замкнутости некоторых орбит алгебраических групп^{*}

© 1997. В. Л. Попов

В. И. Арнольду к его шестидесятилетию

В заметке доказывается критерий замкнутости некоторых орбит алгебраических групп.

Отметим два обстоятельства. Во-первых, большинство известных результатов о замкнутости орбит относится к случаю нулевой характеристики основного алгебраически замкнутого поля k , см. [6]. Мы не налагаем на характеристику поля k никаких ограничений. Вопрос о характеристике важен для приложений. Так, пользуясь настоящим критерием, автор нашел естественное задание образующими и соотношениями аффинных координатных алгебр связных редуктивных алгебраических групп, годное в любой характеристике ([5]; в 1995 г. это было предметом докладов автора на сессии AMS в Чикаго и конференциях в Реймсе и Кортоне). Существование такого задания дает надежду найти квантование указанных алгебр в положительной характеристике (в нулевой это было сделано в [3]). Во-вторых, большинство известных результатов о замкнутости орбит относится к редуктивным группам, см. [6]. Настоящий критерий применим к более широкому классу групп.

1. Далее рассматриваются только *линейные* алгебраические группы. Помимо стандартных, см. [2, 6], используются следующие обозначения:

$\mathfrak{X}(H)$ — группа характеров алгебраической группы H в аддитивной записи;
 h^λ — значение характера $\lambda \in \mathfrak{X}(H)$ на $h \in H$;
 $\mathbb{Q}_{\geq 0} := \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0\}$.

2. Основным результатом заметки является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть R — алгебраическая группа, S — ее борелевская подгруппа и T — максимальный тор в S . Предположим, что существуют характеры $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathfrak{X}(T)$ (не обязательно все различные) и гомоморфизмы $\varphi_i: \mathbb{G}_a \rightarrow S$, $i = 1, \dots, d$, обладающие следующими свойствами:

- (a) $s\varphi_i(t)s^{-1} = \varphi_i(s^{\alpha_i}t)$ для всех $s \in T$, $t \in \mathbb{G}_a$;
- (b) S порождена T и всеми $\varphi_i(\mathbb{G}_a)$;
- (c) выпуклая оболочка множества $\Delta := \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ в $\mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ не содержит нуля.

Пусть V — прямая сумма конечномерных алгебраических R -модулей $V_1, \dots, V_m$ и $v_i \in V_i$ — весовой вектор тора T с весом $\lambda_i \in \mathfrak{X}(T)$. Тогда следующие свойства вектора $v = v_1 + \dots + v_m \in V$ эквивалентны:

- (i) орбита $R \cdot v$ замкнута в V ;
- (ii) орбита $S \cdot v$ замкнута в V ;

^{*} Автор благодарит за поддержку Международный институт математической физики им. Э. Шрёдингера (Вена) и CRDF (грант No. RM1-206).

- (iii) орбита $T \cdot v$ замкнута в V ;
- (iv) нуль — внутренняя точка выпуклой оболочки множества $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ в $\mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\text{char } k = 0$, то система характеров $\{\alpha_i\}$ и гомоморфизмов $\{\varphi_i\}$, обладающих свойствами (а) и (b), всегда существует, см. [4].

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G — редуктивная алгебраическая группа, T — ее максимальный тор и R — замкнутая подгруппа в G , содержащая T . Пусть V — прямая сумма конечномерных алгебраических R -модулей $V_1, \dots, V_s$ и $v_i \in V_i$ — весовой вектор тора T с весом $\lambda_i \in \mathfrak{X}(T)$. Тогда следующие свойства вектора $v = v_1 + \dots + v_s \in V$ эквивалентны:

- (i) орбита $R \cdot v$ замкнута в V ;
- (ii) орбита $T \cdot v$ замкнута в V ;
- (iii) нуль — внутренняя точка выпуклой оболочки множества $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ в $\mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Как известно [2], в этом случае S порождена тором T и содержащимися в S одномерными унитарными корневыми подгруппами, причем при соответствующем выборе системы простых корней в Δ входят только положительные корни. Поэтому условия теоремы 1 выполнены.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если в условиях следствия 1 каждый R -модуль V_i является G -модулем, а P и B — соответственно параболическая и борелевская подгруппы в G , содержащие T , то свойства (i), (ii), (iii) эквивалентны следующим:

- (iv) орбита $B \cdot v$ замкнута в V ;
- (v) орбита $P \cdot v$ замкнута в V ;
- (vi) орбита $G \cdot v$ замкнута в V .

3. Доказательство теоремы 1 опирается на следующий общий критерий замкнутости орбиты связной разрешимой алгебраической группы преобразований H аффинного алгебраического многообразия X , доказанный в [4].

Пусть x — точка многообразия X . Рассмотрим орбитный морфизм $\nu: H \rightarrow X$, $h \mapsto h \cdot x$, и соответствующий коморфизм $\nu^*: k[X] \rightarrow k[H]$. Множество

$$\mathfrak{X}(H)_{X,x} := \{\lambda \in \mathfrak{X}(H) \mid \text{функция } H \rightarrow k, h \mapsto h^\lambda, \text{ содержится в } \nu^*(k[X])\} \quad (1)$$

является подмоноидом в $\mathfrak{X}(H)$.

ТЕОРЕМА 2. Следующие свойства эквивалентны:

- (i) орбита $H \cdot x$ замкнута в X ;
- (ii) моноид (1) является группой.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотрим непустое подмножество $\mathfrak{S}$ конечномерного векторного пространства L над $\mathbb{Q}$. Пусть $\mathbb{Q}_{\geq 0} \mathfrak{S}$, $\text{conv } \mathfrak{S}$ и $\mathbb{Q}\mathfrak{S}$ — соответственно выпуклый конус, порожденный $\mathfrak{S}$, выпуклая оболочка и линейная оболочка подмножества $\mathfrak{S}$ в L . Тогда следующие свойства эквивалентны:

- (i) нуль — внутренняя точка $\text{conv } \mathfrak{S}$;
- (ii) $\mathbb{Q}_{\geq 0} \mathfrak{S} = \mathbb{Q}\mathfrak{S}$.

Если $\mathfrak{S}$ является подполугруппой векторной группы L , то (i) и (ii) эквивалентны свойству

- (iii) $\mathfrak{S}$ является группой.

Это утверждение известно специалистам, но мне не удалось найти ссылку. Доказательство несложно.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. отождествим $\mathfrak{X}(S)$ с $\mathfrak{X}(T)$ с помощью изоморфизма ограничения функций и обозначим эту группу через $\mathfrak{X}$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Это частный случай критерия Гильберта–Мамфорда, см. [6, п. 5.3] (впрочем, поскольку $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ — система образующих моноида $\mathfrak{X}(T)_{V,v}$, утверждение следует из теоремы 2 и замечания 2).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Это вытекает из того, что R/S полно и $R \cdot v = R \cdot (S \cdot v)$.

(i) $\Rightarrow$ (iv). Предположим, что $R \cdot v$ замкнута в V . Если (iv) не выполнено, то найдется такая линейная функция $l \in (\mathfrak{X} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^*$, что $n_i := l(\lambda_i) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ для всех i и по крайней мере одно из этих чисел, скажем, n_1 , положительно. Умножая l на подходящее положительное целое число, можно считать, что $l(\mathfrak{X}) \subseteq \mathbb{Z}$. Следовательно, существует такой гомоморфизм $\gamma: \mathbb{G}_m \rightarrow T$, что $\gamma(t) \cdot v = \sum_{i=1}^s t^{n_i} v_i$. Поэтому замыкание $T \cdot v$ в V содержит $u := \sum_{i=1}^s u_i$, где $u_i = v_i$, если $n_i = 0$, и $u_i = 0$, если $n_i > 0$. Поскольку орбита $R \cdot v$ замкнута в V , это замыкание содержится в $R \cdot v$. С другой стороны, $u \notin R \cdot v$, так как $u_1 = 0$, а $v_1 \neq 0$, — противоречие.

(iv) $\Rightarrow$ (ii). Предположим, что выполнено (iv). Пусть S^u — унипотентный радикал S .

Если L — конечномерный алгебраический R -модуль и $x \in L_\lambda$, $x \neq 0$, то из (a) следует, что $\varphi_i(t) \cdot x = x + tx_1 + t^2 x_2 + \dots$, где $x_m \in L_{\lambda + m\alpha_i}$ (только конечное число x_i отлично от нуля). Ввиду (b) группа S^u порождена всеми $\varphi_i(\mathbb{G}_a)$, $i = 1, \dots, d$. Из (c) вытекает, что любая сумма элементов из Δ является ненулевым элементом из $\mathfrak{X}$. Поскольку $S = TS^u$, из этих фактов следует, что если $s \in S$, то $s \cdot x = s^\lambda x + x'$, где x' — вектор, в разложении которого в сумму весовых векторов тора T не содержится слагаемого веса λ .

Применяя это к $L = V_i$, $x = v_i$, получаем для любого $s \in S$

$$s \cdot v_i = s^{\lambda_i} v_i + v'_i, \quad v'_i \in V_i, \quad (2)$$

где v'_i обладает тем свойством, что его разложение в сумму весовых векторов тора T не содержит слагаемых веса λ_i .

Зафиксируем в V_i такой базис из весовых векторов тора T , чтобы его первым вектором был v_i , и пусть f_i — первый вектор дуального базиса в V_i^* . отождествим естественным образом V_i^* с линейным подпространством в V^* . Тогда $f_i(v_i) = 1$, $f_i(v_j) = 0$ при $i \neq j$ и $f_i(v'_j) = 0$ для всех i и j .

Отсюда и из (2) вытекает, что для любого $s \in S$

$$f_i(s \cdot v) = f_i((s^{\lambda_1} \cdot v_1 + v'_1) + \dots + (s^{\lambda_s} \cdot v_s + v'_s)) = s^{\lambda_i}, \quad s \in S. \quad (3)$$

Рассмотрим полугруппу (1) для $H = S$, $X = V$, $x = v$. Ввиду (3)

$$\lambda_i \in \mathfrak{X}_{V,v} := \mathfrak{X}(S)_{V,v}. \quad (4)$$

Пусть C — выпуклый конус, порожденный $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$, и L — его линейная оболочка в $\mathfrak{X} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Ввиду (iv) и замечания 2

$$C = L. \quad (5)$$

Из (4) и (5) получаем

$$L \subseteq \mathbb{Q}_{\geq 0} \mathfrak{X}_{V,v}. \quad (6)$$

Пусть, как обычно, S_v обозначает S -стабилизатор точки v и $T_v = T \cap S_v$. Из определения $\mathfrak{X}_{V,v}$ следует, что

$$s^\lambda = 1 \text{ для любого } s \in S_v \text{ и } \lambda \in \mathfrak{X}_{V,v}. \quad (7)$$

В частности, это верно для $s \in T_v$.

С другой стороны, из определения v вытекает, что

$$T_v = \{t \in T \mid t^{\lambda_i} = 1 \text{ для всех } i\}. \quad (8)$$

Поскольку $\dim \mathbb{Q}\mathfrak{S} = \operatorname{codim}_T \{t \in T \mid t^\lambda = 1, \lambda \in \mathfrak{S}\}$ для любого непустого подмножества $\mathfrak{S}$ в $\mathfrak{X}$, из (7) и (8) следует, что

$$\dim \mathbb{Q}\mathfrak{X}_{V,v} \leq \dim L. \quad (9)$$

Теперь из (6) и (9) вытекает, что $\mathbb{Q}_{\geq 0} \mathfrak{X}_{V,v} = \mathbb{Q}\mathfrak{X}_{V,v}$, и поэтому $\mathfrak{X}_{V,v}$ является группой (см. замечание 2). Следовательно, орбита $S \cdot v$ замкнута в V по теореме 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $k = \mathbb{C}$ импликацию (ii) $\Rightarrow$ (vi) из следствия 2 теоремы 1 можно доказать также и трансцендентными методами. Рассуждения, с точностью до небольшой модификации, те же, что и в доказательстве предложения 1.2 в [1] (где устанавливается замкнутость орбит иного вида).

А именно, пусть K — максимальная связная компактная подгруппа в G и $(\cdot, \cdot)$ — K -инвариантное эрмитово скалярное произведение на V , относительно которого V_i и V_j , $i \neq j$, ортогональны. Поскольку $T \cdot v$ замкнута в V , функция $v \rightarrow (v, v)$ достигает на $T \cdot v$ минимума. Так как $t \cdot v_i \in V_{\lambda_i}$ при $t \in T$, можно, изменив обозначения, считать, что этот минимум достигается на v . Значит, $((\operatorname{Lie} T) \cdot v, v) = 0$. Так как $(\operatorname{Lie} G)_\alpha \cdot (V_i)_{\lambda_i} \subseteq (V_i)_{\alpha + \lambda_i}$ для любого корня α , то из ортогональности весовых подпространств разных весов и ортогональности различных подпространств V_i следует, что $((\operatorname{Lie} G)_\alpha \cdot v, v) = 0$. Это показывает, что $((\operatorname{Lie} G) \cdot v, v) = 0$. Замкнутость орбиты $G \cdot v$ в V вытекает теперь из критерия Кемпфа–Несс (см. [6, п. 6.12]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dadok J., Кас В. J. Algebra*, **92**, 504–524 (1985).
2. *Хамфри Д. Линейные алгебраические группы*. Наука, М., 1980.
3. *Joseph A. Quantum groups and their primitive ideals*, Springer-Verlag, 1995.
4. *Понов В. Л. Матем. сб.*, **135**, No. 3, 385–402 (1988).
5. *Popov V. L. Generators and relations of the affine coordinate rings of the connected semisimple algebraic groups*. Preprint (1995).
6. *Винберг Э. Б. и Попов В. Л. Теория инвариантов. Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. направл. Алгебра-4, ВИНТИ, Т. 55, 1989, с. 137–309.*

Московский государственный институт
электроники и математики
e-mail: popov@ppc.msk.ru

Поступило в редакцию
6 февраля 1997 г.