Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Самойленко, Л. Б. Туровская, О представ-
лениях $*$ -алгебр неограниченными операторами,
Функц. анализ и его прил., 1997, том 31, вы-
пуск 4, 80–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa497>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-
тельским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:25:43

УДК 517.984.46

О представлениях $*$ -алгебр неограниченными операторами^{*}

© 1997. Ю. С. САМОЙЛЕНКО, Л. Б. ТУРОВСКАЯ

В [1–3] изучается сложность структуры представлений алгебры $\mathfrak{A}$ над $\mathbb{C}$ с инволюцией $*$ ограниченными операторами в комплексном гильбертовом пространстве H . Представления $*$ -алгебры $\mathfrak{A}$, в частности, считаются сложными (алгебра $\mathfrak{A}$ p -дикая), если они «содержат в качестве фрагмента» представления свободной $*$ -алгебры $\mathfrak{B}$ с двумя самосопряженными образующими, т. е. существует $*$ -гомоморфизм $\phi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \otimes M_m$ (M_m — алгебра $m \times m$ -матриц), такой, что порожденный им функтор из категории представлений $\mathcal{R}(\mathfrak{B})$ в категорию представлений $\mathcal{R}(\mathfrak{A})$ является строгим и полным. Основания для того, чтобы считать представления такой алгебры сложными, получены в [1]: ее $*$ -представления «содержат в качестве фрагмента» $*$ -представления любой аффинной $*$ -алгебры. Заметим, что если $*$ -алгебра p -дикая, то она имеет факторпредставление, не являющееся представлением типа I. Обратное утверждение неверно (см. [2]).

В настоящей работе изучается сложность представлений коммутативной $*$ -алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ комплексных полиномов от вещественных переменных x_1, x_2 неограниченными операторами. Если представление π такой алгебры интегрируемо, т. е. коммутируют спектральные проекторы замыканий операторов $\pi(x_1), \pi(x_2)$ или, что эквивалентно (см. [5]), существует плотное инвариантное относительно операторов представления линейное множество $\mathcal{D}$, состоящее из аналитических векторов для $\pi(x_1), \pi(x_2)$ и такое, что $\pi(x_1)\pi(x_2)\varphi = \pi(x_2)\pi(x_1)\varphi$ для любых $\varphi \in \mathcal{D}$, то все неприводимые представления $*$ -алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ одномерные. В п. 2 работы доказано, что множество неинтегрируемых представлений устроено сложно и эти представления «содержат в качестве фрагмента» представления $*$ -алгебры $\mathfrak{B}$. Для $*$ -алгебры $\mathfrak{A} = \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \mid x_i^* = x_i, [x_1, [x_1, x_2]] = 0 \rangle$ в п. 3 показано, что сложно устроены даже представления π , определенные на плотной инвариантной относительно операторов представлений области, состоящей из аналитических векторов для операторов $\pi(x_1), \pi(x_2)$.

1. Приведем, в основном следуя [4], необходимые определения и результаты из теории представлений $*$ -алгебр неограниченными операторами. Пусть $\mathfrak{A}$ есть $*$ -алгебра, порожденная самосопряженными образующими $a_1, \dots, a_n$ и единицей, которые удовлетворяют соотношениям

$$P_j(a_1, \dots, a_n) = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

где P_j — полиномы от некоммутирующих переменных $a_1, \dots, a_n$ над $\mathbb{C}$, и $(P_j(\cdot))^* = P_j(\cdot)$.

^{*} Работа первого автора частично поддержана грантом AMS, а второго — Международной Соросовской программой поддержки образования в отрасли точных наук (ISSEP), грант PSU061106, и грантом AMS.

Рассмотрим самосопряженные представления π *-алгебры $\mathfrak{A}$, такие, что операторы $\pi(a_i)$, $i = 1, \dots, n$, существенно самосопряжены на области представления $\mathscr{D}(\pi)$ (см. [4]).

Оператор $T \in L(H, \hat{H})$ будем называть сплетающим самосопряженные представления π и $\hat{\pi}$, если $TE_{A_i}(\Delta) = E_{\hat{A}_i}(\Delta)T$ для любых $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$, где $A_i = \overline{\pi(a_i)|_{\mathscr{D}(\pi)}}$, $\hat{A}_i = \overline{\hat{\pi}(a_i)|_{\mathscr{D}(\hat{\pi})}}$ и $E_A(\cdot)$ — разложение единицы самосопряженного оператора A . Множество таких операторов T будем обозначать через $I(\pi, \hat{\pi})$. Согласно [4], $I(\pi, \hat{\pi})$ слабо замкнуто. Самосопряженные представления алгебры $\mathfrak{A}$ порождают W^* -категорию $\mathscr{R}(\mathfrak{A})$, объектами которой являются сами самосопряженные представления, а морфизмами — сплетающие операторы.

2. Пусть $\mathfrak{A}$ — коммутативная алгебра полиномов от вещественных переменных x_1, x_2 . Вместо категории $\mathscr{R}(\mathfrak{A})$ рассмотрим эквивалентную категорию $\tilde{\mathscr{R}}(\mathfrak{A})$, объектами которой являются пары унитарных операторов (U, V) , обратные преобразования Кэли которых порождают самосопряженное представление *-алгебры $\mathfrak{A}$ (т.е. существует область $\mathscr{D}(\pi) \subset \mathscr{D}(X_1) \cap \mathscr{D}(X_2)$, инвариантная относительно $X_1 = i(U + I)(U - I)^{-1}$, $X_2 = i(V + I)(V - I)^{-1}$ и такая, что операторы $\pi(x_i) := X_i|_{\mathscr{D}(\pi)}$, $i = 1, 2$, определяют самосопряженное представление алгебры $\mathfrak{A}$, причем $\overline{\pi(x_i)}$, $i = 1, 2$, самосопряжены), а морфизмами — ограниченные операторы, сплетающие разные пары (U, V) . Покажем, что представления (U, V) «содержат в качестве фрагмента» *-представления алгебры $\mathfrak{B}$.

В основном следуя [4], рассмотрим следующую конструкцию. Пусть $a = a^*$, $b = b^*$ — образующие *-алгебры $\mathfrak{B}$, а ρ — ее представление в пространстве $\mathscr{H}(\rho)$, $\rho(a) =: A$, $\rho(b) =: B$, $A, B \in L(\mathscr{H}(\rho))$. В пространстве $W = \mathscr{H}(\rho) \oplus \mathscr{H}(\rho)$ определим пару операторов

$$p = \begin{pmatrix} \lambda I & \mu A & 0 \\ \mu A & \lambda I & \mu B \\ 0 & \mu B & \lambda I \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ таковы, что $1/2 < p < 3/4$. Кроме того, будем считать, что $A, B > 0$, в противном случае вместо A, B следует взять операторы $A + (\|A\| + 1)I$, $B + (\|B\| + 1)I$ соответственно. Положим $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n$, где $H_n = W \oplus W$. Любой вектор в H может быть записан в виде $(\dots, \varphi_0, \underline{\varphi_1}, \varphi_2, \dots)$, где компонента с индексом 1 подчеркнута. В пространстве H рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} v_1(\dots, \varphi_0, \underline{\varphi_1}, \varphi_2, \dots) &= (\dots, \underline{\varphi_0}, \varphi_1, \varphi_2, \dots), \\ v_2(\dots, \varphi_0, \underline{\varphi_1}, \varphi_2, \dots) &= (\dots, \underline{\varphi_0}, w_1 \varphi_1, \varphi_2, \dots), \\ v_3(\dots, \varphi_0, \underline{\varphi_1}, \varphi_2, \dots) &= (\dots, \underline{\varphi_0}, w_1 \varphi_1, w_2 \varphi_2, \dots), \end{aligned}$$

где $w_i: W \oplus W \rightarrow W \oplus W$,

$$w_1 = \begin{pmatrix} i(I - 2q) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} I - 2p & -2(p - p^2)^{1/2} \\ -2(p - p^2)^{1/2} & 2p - I \end{pmatrix}.$$

Наконец, операторы U, V определим в пространстве $\mathscr{H}(\pi) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathscr{H}_n$, где

$\mathcal{H}_n = H$, следующим образом:

$$\begin{aligned} U(\dots, \varphi_0, \underline{\varphi_1}, \varphi_2, \dots) &= (\dots, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots), \\ V(\dots, \varphi_0, \underline{\varphi_1}, \varphi_2, \dots) &= (\dots, v_0 \varphi_0, \underline{v_1 \varphi_1}, v_2 \varphi_2, \dots), \end{aligned}$$

где $v_n = v_1$ при $n < 1$ и $v_n = v_3$ при $n > 3$. Подобно тому, как это делается в [4], доказывается следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Операторы (U, V) порождают самосопряженное представление π $*$ -алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ на $\mathcal{D}(\pi) = \mathcal{D}_\infty(X_1, X_2)$, где $\mathcal{D}_\infty(X_1, X_2) = \{\varphi \in \mathcal{H}(\pi) \mid \varphi \in \mathcal{D}(X_1^n X_2^m) \cap \mathcal{D}(X_2^m X_1^n) \text{ и } X_1^n X_2^m \varphi = X_2^m X_1^n \varphi, n, m \in \mathbb{N}\}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Операторы X_i^n , $i = 1, 2$, самосопряжены в существенном на $\mathcal{D}(\pi)$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Функтор F из категории $\mathcal{R}(\mathfrak{B})$ в категорию $\widetilde{\mathcal{R}}(\mathfrak{A})$ определим следующим образом:

- если ρ — представление алгебры $\mathfrak{B}$, $\rho(a) = A$, $\rho(b) = B$, $A, B \in L(\mathcal{H}(\rho))$, то $F(\rho) = (U, V)$,
- если $C: \mathcal{H}(\rho) \rightarrow \mathcal{H}(\hat{\rho})$, $CA = \hat{A}C$, $CB = \hat{B}C$, то $F(C) = \mathcal{C} = \text{diag}(\dots, C, C, \dots)$ и $\mathcal{C}: \mathcal{H}(\pi) \rightarrow \mathcal{H}(\hat{\pi})$.

ТЕОРЕМА 1. *Функтор F строгий и полный.*

3. Рассмотрим $*$ -алгебру $\mathfrak{A} = \langle x_1, x_2 \mid x_i^* = x_i, [x_1, [x_1, x_2]] = 0 \rangle$. Очевидно, что любое самосопряженное представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ является самосопряженным представлением $*$ -алгебры $\mathfrak{A}$. Как следует из предыдущего пункта, такие представления могут быть устроены сложно. В данном пункте мы покажем, что, в отличие от алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]$, сложно устроены уже представления π , определенные на плотной инвариантной относительно операторов представления области $\mathcal{D}$, состоящей из аналитических векторов для операторов $\pi(x_1)$, $\pi(x_2)$.

Следуя [6], рассмотрим следующую конструкцию. Пусть ρ — представление $*$ -алгебры $\mathfrak{B}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}(\rho)$, $\rho(a) =: A$, $\rho(b) =: B$, $A, B \in L(\mathcal{H}(\rho))$. В пространстве $H(\pi) = (\mathcal{H}(\rho) \oplus \mathcal{H}(\rho) \oplus \mathcal{H}(\rho)) \otimes L_2(\mathbb{R}, dx)$ рассмотрим максимальные операторы $X_1 = I_{\mathcal{H}(\rho)^3} \otimes M_x$, $X_2 = A_1 \otimes i d/dx + A_2 \otimes I_{L_2(\mathbb{R}, dx)}$, где M_x — оператор умножения на x , I_H — единичный оператор в пространстве H ,

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\mathcal{H}(\rho)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{\mathcal{H}(\rho)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 I_{\mathcal{H}(\rho)} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & A & B \\ A & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$. Кроме того, будем считать, что $A, B > 0$. Обозначим через $H^w(A)$ множество аналитических векторов для оператора A . Известно, что существует плотное линейное множество $\Phi \subset L_2(\mathbb{R}, dx)$, такое, что Φ инвариантно относительно операторов M_x , $i d/dx$ и $\Phi \subset H^w(M_x) \cap H^w(d/dx)$. Положим $\mathcal{D}(\pi) = \text{л. о. } \{g \otimes h \mid g \in \mathcal{H}(\rho) \oplus \mathcal{H}(\rho) \oplus \mathcal{H}(\rho), h \in \Phi\}$, $\pi(x_1) = X_1|_{\mathcal{D}(\pi)}$, $\pi(x_2) = X_2|_{\mathcal{D}(\pi)}$. Очевидно, что $\mathcal{D}(\pi)$ плотно в $H(\pi)$ и инвариантно относительно X_i , $i = 1, 2$. Пусть $\mathcal{D}(\pi^*) = \bigcap_{r \in \mathbb{N}} \bigcap_{(j_1, \dots, j_r) \in J^r} \mathcal{D}(\pi(x_{j_r})^* \cdots \pi(x_{j_1})^*)$, $J = \{1, 2\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. (а) $\mathcal{D}(\pi) \subset H^w(X_1) \cap H^w(X_2)$;

(б) операторы X_1, X_2 определяют самосопряженное представление на $\mathcal{D}(\pi^*) \supset \mathcal{D}(\pi)$.

Определим функтор F из категории $\mathcal{R}(\mathfrak{B})$ в категорию $\mathcal{R}(\mathfrak{A})$ следующим образом:

- если ρ — представление $*$ -алгебры $\mathfrak{B}$, $\rho(a) = A$, $\rho(b) = B$, то $F(\rho) = \pi^*$ (π^* — представление $*$ -алгебры $\mathfrak{A}$ на $\mathcal{D}(\pi^*)$), порожденное операторами $X_i|_{\mathcal{D}(\pi^*)}$, $i = 1, 2$;
- если $C: \mathcal{H}(\rho) \rightarrow \mathcal{H}(\hat{\rho})$, $CA = \hat{A}C$, $CB = \hat{B}C$, то

$$F(C) = \mathcal{C} = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \otimes I_{L_2(\mathbb{R}, dx)}.$$

ТЕОРЕМА 2. Функтор F строгий и полный.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кругляк С. А., Самойленко Ю. С. Функц. анализ и его прил., **14**, вып. 1, 60–62 (1980).
2. Пирятинская А. Ю., Самойленко Ю. С. Укр. матем. ж., **47**, № 1, 70–78 (1995).
3. Kruglyak S., Piryatinskaya A. Preprint, Institut Mittag-Leffler (1996).
4. Schmüdgen K. Unbounded operator algebras and representation theory, Akademie-Verlag, Berlin, 1990.
5. Nelson E. Ann. Math. **70**, No. 3, 572–615 (1959).
6. Nizhnik L. P., Turowska L. B. Methods of Func. Anal. and Topol. В печати.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию
11 сентября 1996 г.

УДК 517.9

Об условиях конечности точечного спектра в несамосопряженной модели Фридрихса*

© 1997. С. А. СТЕПИН

В работе изучается точечный спектр σ_p операторов в $L_2(l)$, $l = [a, b] \subset \mathbb{R}$, вида $H = H_0 + V$, где H_0 — оператор умножения на независимую переменную, а возмущение V — интегральный оператор с ядром v , удовлетворяющим некоторым условиям гладкости.

Известно (см. [1–3]), что спектральные свойства операторов самосопряженной модели Фридрихса существенно зависят от степени гёльдеровской гладкости ядра возмущения. В этих терминах границы конечности сингулярного спектра служит показатель гёльдеровости $1/2$. В несамосопряженном случае даже при условии бесконечной дифференцируемости ядра v может происходить сгущение собственных значений к отрезку l ; в [4] построен соответствующий пример и исследована структура множества точек накопления собственных значений.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 96-01-00333).