Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Фарков, Ортогональные всплески на локально компактных абелевых группах, *Функци. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 4, 86–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa498>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 02:48:44

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фаддеев Л. Д.* Труды МИАН, **73**, 292–313 (1964).
2. *Павлов Б. С., Петрас С. В.* Функц. анализ и его прил., **4**, вып. 2, 54–61 (1970).
3. *Дынькин Е. М., Набоко С. Н., Яковлев С. И.* Алгебра и анализ, **3**, вып. 2, 77–90 (1991).
4. *Набоко С. Н.* Зап. науч. сем. ЛОМИ, **39**, 40–58 (1974).
5. *Степин С. А.* Известия РАН, **60**, № 6, 201–221 (1996).
6. *Howland J. S.* Pacif. J. Math., **55**, 157–174 (1974).
7. *Yafaev D. R.* Mathematical scattering theory. Transl. Math. Monographs, Vol. 105, Am. Math. Soc., 1992.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. Мир, М., 1972.
9. *Фридрихс К. О.* Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. Мир, М., 1969.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
4 февраля 1997 г.

УДК 517.518

Ортогональные всплески на локально компактных абелевых группах

© 1997. Ю. А. ФАРКОВ

1. Пусть G — локально компактная абелева группа, μ — мера Хаара на G , $L^2(G) := L^2(G, \mu)$, H — дискретная подгруппа в G , такая, что факторгруппа G/H компактна, A — автоморфизм группы G , такой, что $A(H)$ — собственная подгруппа в H , и $s := \text{card}(H/A(H))$. В предположении, что функция $\varphi \in L^2(G)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(g) = \sum_{h \in H} b(h) \varphi(Ag - h), \quad b \in L^2(H), \quad g \in G, \quad (1)$$

положим

$$V(\varphi) := \text{clos}_{L^2(G)} \text{span} \{ \varphi(\cdot - h) \mid h \in H \},$$

$$V_j := \{ f(A^j \cdot) \mid f \in V(\varphi) \}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Из (1) следует, что $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Ортогональное дополнение к V_j в V_{j+1} обозначается через W_j .

ЗАДАЧА А. Найти функции $\psi_1, \dots, \psi_{s-1}$ в $L^2(G)$, такие, что W_0 является прямой суммой подпространств

$$W_0^{(i)} := \text{clos}_{L^2(G)} \text{span} \{ \psi_i(\cdot - h) \mid h \in H \}, \quad i = 1, \dots, s-1.$$

Относительно способов решения этой задачи при построении всплесковых базисов в $L^2(\mathbb{R}^d)$ см., например, [1, 2]. Пару (G, A) будем называть *допустимой*, если 1) группа G метризуема, причем выполняется вторая аксиома счетности, и 2) автоморфизм A непрерывен, а его обратный A^{-1} является сжатием. Некоторые примеры допустимых пар (G, A) с $G \neq \mathbb{R}^d$ даны в [3].

Пусть $\{\omega_1, \dots, \omega_s\}$ — полный набор представителей для $H/A(H)$. Множество $M \subset G$ называется *самоподобным* относительно A , если

$$M = \bigcup_{j=1}^s (A^{-1}(M) + A^{-1}(\omega_j)).$$

Для всякой допустимой пары (G, A) существует фундаментальная область F ($F \subset G$, $0 \in F$, $H+F = G$ и $(h+F) \cap F = \emptyset$ для всех $h \in H \setminus \{0\}$), самоподобная относительно A . Более того, имеется итерационная процедура, позволяющая по данным G, H, A находить соответствующую самоподобную область F (см. [3, 4]). Всюду в дальнейшем пара (G, A) предполагается допустимой.

Семейство подпространств $\{V_j\}$ является *кратноразрешимостью* в $L^2(G)$, если наряду с включениями $V_j \subset V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, выполнены равенства $\bigcap V_j = \{0\}$ и $\overline{\bigcup V_j} = L^2(G)$ (см. [1, 5]). Если $\{V_j\}$ — кратноразрешимость, то $L^2(G) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$ и, следовательно, решение задачи A приводит к ортогональному базису $\{\psi_i(A^j \cdot - h) \mid 1 \leq i \leq s-1, j \in \mathbb{Z}, h \in H\}$ в $L^2(G)$. Ниже формулируются две теоремы о существовании ортогональных всплесковых базисов в $L^2(G)$, связанные с некоторыми результатами из [6] и относящиеся к случаю, когда выполнено условие

$$\{\varphi(\cdot - h) \mid h \in H\} \text{ — ортонормированная система в } L^2(G). \quad (2)$$

Для $G = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{Z}$ соответствующие всплесковые конструкции хорошо известны.

2. Будем пользоваться следующими обозначениями (см. [6, 7]): G^* — группа, двойственная к G (группа характеров), μ^* — мера Хаара на G^* , $\text{ch}(g, g^*)$ — значение характера $g^* \in G^*$ на элементе $g \in G$, $H^\perp$ — аннулятор подгруппы H , $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции $f \in L^2(G)$, $\hat{\alpha}$ — преобразование Фурье функции $\alpha \in L^2(H)$. Отметим, что аннулятор подгруппы $A(H)$ в H состоит из s элементов двойственной группы H^* . Для преобразований Фурье функций f_1 и f_2 из $L^2(G)$ аналогично случаю $G = \mathbb{R}^d$ (см., например, [2, 5]) вводится обозначение

$$[\hat{f}_1, \hat{f}_2](\cdot) := \frac{1}{|G/H|} \sum_{h^* \in H^\perp} \hat{f}_1(\cdot + h^*) \overline{\hat{f}_2(\cdot + h^*)} \quad \text{на } G^*.$$

При естественном согласовании мер Хаара на G и G/H условие (2) эквивалентно равенству $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] = 1$ (см. [8]).

Схема решения задачи A при условии (2):

Шаг 1. Принять $c_0 := \|\varphi(A \cdot)\|_{L^2(G)}$, $\alpha_0 := (c_0/\sqrt{s})b$.

Шаг 2. Пусть $\{h_0^*, \dots, h_{s-1}^*\}$ — аннулятор подгруппы $A(H)$ в H . Найти $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1} \in L^2(H)$, такие, что матрица $(\hat{\alpha}_i(\cdot + h_k^*))_{i,k=0}^{s-1}$ унитарна на H^* .

Шаг 3. Для $i = 1, \dots, s-1$ принять

$$\psi_i(\cdot) = \frac{\sqrt{s}}{c_0} \sum_{h \in H} \alpha_i(h) \varphi(A \cdot - h).$$

ЛЕММА. Пусть A, φ связаны уравнением (1) и выполнено условие (2). Если ψ_i ($i = 1, \dots, s-1$) определены шагами 1–3, то $W_0 = \bigoplus_{i=1}^{s-1} W_0^{(i)}$ и

для каждого i система $\{\psi_i(\cdot - h) \mid h \in H\}$ является ортонормированным базисом в $W_0^{(i)}$.

Для случая $G = \mathbb{R}^d$, $H = \mathbb{Z}^d$, $A = 2I$ способы реализации шага 2 изложены в [2]. В условиях леммы последовательности $\sqrt{s} \alpha_i$ ($i = 0, 1, \dots, s-1$) образуют так называемую QMF-систему в $L^2(H)$ (здесь QMF происходит от Quadrature Mirror Filters; см. [8]).

Для фундаментальной области F подгруппы H и для натурального m пусть $N_1 := \chi_F$, $N_m := N_{m-1} * N_1$ ($m \geq 2$). Аналог интерполяционной теоремы Шенберга для системы $\{N_m\}$ установлен в [6].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\hat{\varphi} = \hat{N}_m / [\hat{N}_m, \hat{N}_m]^{1/2}$, $m \in \mathbb{N}$. Если пара (G, A) допустима и фундаментальная область F самоподобна относительно A , то $\{V_j\}$ — кратноразрешимость в $L^2(G)$ и соответствующие ортогональные всплески $\psi_1, \dots, \psi_{s-1}$ конструируются по приведенной выше схеме.

Кратноразрешимость $\{V_j\}$ из этой теоремы генерируется также функцией $\varphi = N_m$, однако система всплесков тогда строится иначе и базис получается неортогональным (см. [3]).

Пусть E — множество в G^* , такое, что $\nu := \mu^*(E) > 0$ и

$$\{\nu^{-1/2} \text{ch}(h, \cdot) |_{E}\}_{h \in H}$$

— ортонормированный базис в $L^2(E)$. Положим

$$V_E := \text{clos}_{L^2(G)} \text{span} \{ \text{ch}(\cdot, g^*) \mid g^* \in E \}, \quad \varphi_E(\cdot) := \frac{1}{\nu} \int_E \text{ch}(\cdot, g^*) d\mu^*(g^*).$$

В [6] показано, что

$$f(\cdot) = \sum_{h \in H} f(h) \varphi_E(\cdot - h) \quad \text{для всех } f \in V_E.$$

Отсюда в случае $G = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{Z}$, $E = [-\pi, \pi]$ следует классическое разложение Уиттекера–Котельникова–Шеннона для $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\text{supp } \hat{f} \subset [-\pi, \pi]$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi = \varphi_E$, $0 \in E$ и пара (G, A) допустима. Тогда $\{V_j\}$ — кратноразрешимость в $L^2(G)$ и соответствующие ортогональные всплески $\psi_1, \dots, \psi_{s-1}$ находятся по указанной выше схеме.

В условиях теоремы 2 равенство $L^2(G) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$ представляет собой аналог двоичного разложения Литлвуда–Пэли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Meyer Y. Ondelettes et Operateurs, I: Ondelettes. Hermann, Paris, 1990.
2. Jia R.-Q., Shen Z. Proc. Edinburgh Math. Society, **37**, 271–300 (1994).
3. Dahlke S. In: Wavelets, Images and Surface Fitting (P. J. Laurent, A. Le Mehaute, and L. L. Schumaker, eds.). A. K. Peters, Wellesley, 1994.
4. Grochenig K. H., Madych W. R. IEEE Trans. Inform. Theory, **38**, 556–568 (1992).
5. de Boor C., De Vore R., Ron A. Constr. Approx., **9**, 123–166 (1993).
6. Тихомиров В. М. УМН, **50**, вып. 2, 125–174 (1995).
7. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ, Т. 1, Наука, М., 1975.
8. Holschneider M. Appl. Comput. Harm. Analysis, **2**, 52–60 (1995).