Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. П. Осиленкер, Аналог формулы следа для дискретных операторов Штурма–Лиувилля с асимптотически N -периодическими коэффициентами, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 4, 72–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa499>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:05:34

где $Z(s)$ — дзета-функция оператора $-\Delta + q$, а $\zeta(s, a)$ — обобщенная дзета-функция Римана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Требование вещественнозначности потенциала q для утверждений о расходимости соответствующих рядов является существенным, так как в работе [13] построен пример такого комплекснозначного потенциала q , что спектры операторов $-\Delta + q$ и $-\Delta$ совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. Мир, М., 1980.
2. Guillemin V. Adv. in Math., **28**, 129–137 (1978).
3. Guillemin V. Adv. in Math., **28**, 138–147 (1978).
4. Guillemin V. Adv. in Math., **27**, 273–286 (1978).
5. Guillemin V. Adv. in Math., **42**, 248–282 (1981).
6. Kamo T. Теория возмущений линейных операторов. Мир, М., 1972.
7. Widom H. Adv. in Math., **31**, 63–66 (1979).
8. Садовничий В. А., Дубровский В. В. ДАН СССР, **319**, вып. 1, 61–62 (1991).
9. Подольский В. Е. Матем. заметки, **56**, вып. 1, 71–77 (1994).
10. Любишкин В. А., Подольский В. Е. Матем. заметки, **54**, вып. 2, 33–37 (1993).
11. Podol'skii V. E. Russian J. Math. Phys., **4**, No. 1, 123–130 (1996).
12. Бобров А. Н. Дифференциальные уравнения, **33**, вып. 6, 433–438 (1997).
13. Guillemin V., Uribe A. Trans. Am. Math. Soc., **279**, No. 2, 759–771 (1983).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
16 апреля 1997 г.

УДК 517.5

Аналог формулы следа для дискретных операторов Штурма–Лиувилля с асимптотически N -периодическими коэффициентами

© 1997. Б. П. ОСИЛЕНКЕР

Пусть

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \{a_{n+1}, b_n\} \quad (n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}) \quad (1)$$

— бесконечная якобиева (трехдиагональная) симметричная матрица с $a_{n+1} > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}^1$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Обозначим через $\mathcal{L}$ дискретный оператор Штурма–Лиувилля, порожденный разностным выражением

$$(Lu)_n = a_{n+1}u_{n+1} + b_nu_n + a_nu_{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+, u_{-1} = 0),$$

где $u = (u_n)_{n=0}^\infty \in l^2$ [1, с. 506–507]. Задача на собственные значения определяет ортогональные полиномы первого рода $\{p_n(\lambda)\}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), заданные трехчлен-

ным рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned}\lambda p_n(\lambda) &= a_{n+1}p_{n+1}(\lambda) + b_n p_n(\lambda) + a_n p_{n-1}(\lambda) \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \\ p_{-1}(\lambda) &= 0, \quad p_0(\lambda) = 1, \quad a_0 = 0.\end{aligned}$$

Как известно [1, с. 515; 2, с. 94], если элементы матрицы (1) ограничены, то существует единственная конечная положительная борелевская мера μ , такая, что $\text{Supp}(\mu)$ есть компакт в $\mathbb{R}^1$ и $p_n(\lambda)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) образуют ортонормированную по мере μ систему ортогональных полиномов n -й степени.

Рассмотрим класс Неваи $\mathcal{M}$ якобиевых матриц (1), для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Тогда [2, с. 104] $\text{Supp}(\mu) = [-1, 1] \cup S$, где S — конечное или счетное множество действительных чисел, лежащих вне отрезка $[-1, 1]$, которые могут накапливаться лишь к концам отрезка. При этом существуют чисто дискретная мера [3, 4] и чисто сингулярная непрерывная мера [5], для которых ассоциированная матрица Якоби J принадлежит классу $\mathcal{M}$. С другой стороны, в [6] показано, что если $\mu'(x) > 0$ почти всюду в $[-1, 1]$, то ассоциированная матрица Якоби J принадлежит классу $\mathcal{M}$.

Следующее утверждение устанавливает связь между якобиевой матрицей (1) из класса $\mathcal{M}$ и спектральной мерой μ .

ТЕОРЕМА 1 [7, 8]. Пусть $\text{Supp}(\mu) = [-1, 1]$ и элементы ассоциированной матрицы Якоби J из класса $\mathcal{M}$ являются последовательностями ограниченной вариации:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n - a_{n+1}| + |b_n - b_{n+1}|) < \infty.$$

Тогда равномерно на всех компактах из $(-1, 1)$ справедлива формула следа

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(a_{n+1}^2 - a_n^2) p_n^2(\lambda) + a_{n+1}(b_{n+1} - b_n) p_n(\lambda) p_{n+1}(\lambda)] = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{2\pi\mu'(\lambda)}.$$

При этом мера μ абсолютно непрерывна в интервале $(-1, 1)$ и функция $\mu'(\lambda)$ непрерывна и положительна для всех $\lambda \in (-1, 1)$.

Пусть $\{a_{n+1}^0 > 0\}$, $\{b_n^0 \in \mathbb{R}^1\}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) — заданные периодические (с периодом $N \geq 1$) последовательности,

$$a_{n+N}^0 = a_n^0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad b_{n+N}^0 = b_n^0 \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Если для элементов якобиевой матрицы (1) выполняются соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [|a_n - a_n^0| + |b_n - b_n^0|] = 0,$$

то будем говорить, что матрица J является асимптотически N -периодической якобиевой матрицей (или что порожденный ею разностный оператор $\mathcal{L}$ имеет асимптотически N -периодические коэффициенты), и писать $J \in AP_N$.

Ортонормированные полиномы, порождаемые якобиевой матрицей

$$J_0 = \begin{pmatrix} b_0^0 & a_1^0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1^0 & b_1^0 & a_2^0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2^0 & b_2^0 & a_3^0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \{a_{n+1}^0, b_n^0\} \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

обозначим через $q_n(\lambda)$. Положим

$$T(\lambda) = \frac{1}{2} \left[q_N(\lambda) - \frac{a_N^0}{a_{N+1}^0} q_{N-2}^{(1)}(\lambda) \right], \quad (2)$$

где $q_{N-2}^{(1)}(\lambda)$ — ассоциированные полиномы первого рода порядка $N-2$, задаваемые якобиевой матрицей $J_1 = \{a_{n+2}^0, b_{n+1}^0\}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Носитель спектральной меры μ есть $E \cup E^*$, где множество $E = \{\lambda \in \mathbb{R}^1, |T(\lambda)| \leq 1\}$ состоит не более чем из N промежутков числовой оси, а E^* — конечное или счетное множество на оси, лежащее вне E , с предельными точками на E [9]. Частный случай, когда промежутки, составляющие E , касаются друг друга (точки касания определяются соотношением $T^2(\lambda) = 1$), приводит к решетчатым ортогональным полиномам [10–13].

В обзоре [8] П. Неваи поставил задачу обобщить теорему 1 на класс AP_N .

Как показано в [13], если $J \in AP_N$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n - a_{n+N}| + |b_n - b_{n+N}|) < \infty, \quad (3)$$

то спектральная мера μ является абсолютно непрерывной на множестве $E_0 = E \setminus \{T^2(\lambda) = 1\}$. Функция $\mu'(\lambda)$ непрерывна и положительна на E_0 .

ЛЕММА. Пусть $J \in AP_N$. Положим

$$s(\lambda) = 2 \left(\prod_{k=1}^N a_k^0 \right) T(\lambda),$$

где $T(\lambda)$ определено по формуле (2). Тогда для коэффициентов рекуррентного соотношения

$$s(\lambda) p_n(\lambda) = \sum_{j=0}^N d_{n+j}^{(j)} p_{n+j}(\lambda) + \sum_{j=0}^N d_n^{(j)} p_{n-j}(\lambda) \quad (n \geq N-1)$$

имеют место предельные равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{(N)} = \prod_{k=1}^N a_k^0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{(j)} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, N-1).$$

Отметим, что можно выразить явно числа $d_n^{(j)}$ через элементы матриц J , J_0 и коэффициенты полинома $s(\lambda)$, но мы опускаем соответствующие формулы ввиду их сложности.

Решением задачи Неваи является

ТЕОРЕМА 2. Пусть элементы якобиевой матрицы $J \in AP_N$ удовлетворяют условиям (3) и при всех j, l ($j = 1, \dots, N, l = 0, 1, \dots, N$) выполняется оценка

$$\sum_{k=0}^{\infty} [|d_{k+j}^{(j)} d_{k+j+l}^{(l)} - d_{k+j+l}^{(j)} d_{k+l}^{(l)}| + |d_{k+j}^{(j)} d_{k+j}^{(l)} - d_{k+j-l}^{(j)} d_k^{(l)}|] < \infty. \quad (4)$$

Тогда равномерно на любом замкнутом множестве $K \subset E_0$ справедлива следующая формула следа:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^N \sum_{k=0}^{\infty} \{ [d_{k+j}^{(j)} d_{k+j+l}^{(l)} - d_{k+j+l}^{(j)} d_{k+l}^{(l)}] p_k(\lambda) p_{k+j+l}(\lambda) \\ & \quad + [d_{k+j}^{(j)} d_{k+j}^{(l)} - d_{k+j-l}^{(j)} d_k^{(l)}] p_k(\lambda) p_{k+j-l}(\lambda) \} \\ & = \frac{2N}{\pi} \prod_{k=1}^N (a_k^0)^2 \frac{\sqrt{1 - T^2(\lambda)} |T'(\lambda)|}{\mu'(\lambda)}. \end{aligned} \quad (5)$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть якобиева матрица J принадлежит классу $\mathcal{M}$ и удовлетворяет условиям (3) и (4). Тогда правая часть формулы (5) равна

$$\frac{N^2}{\pi 2^{2N-1}} \frac{U_{N-1}^2(\lambda) \sqrt{1 - \lambda^2}}{\mu'(\lambda)},$$

где $U_{N-1}(\lambda)$ — полиномы Чебышёва второго рода порядка $N - 1$.

Условиям теоремы и следствия удовлетворяют, например, решетчатые ультрасферические полиномы (в частности, решетчатые полиномы Лежандра) [10, 13], решетчатые симметричные и 4-параметрические несимметричные полиномы Поллачека [11, 12], системы полиномов, ортогональных на нескольких промежутках числовой оси [14, 15].

Выражаю благодарность Е. А. Горину за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Наукова Думка, Киев, 1965.
2. Никитшин Е. М., Сорокин В. М. Рациональные аппроксимации и ортогональность. Наука, М., 1988.
3. Lubinsky D. Proc. Amer. Math. Soc., **104**, 516–524 (1988).
4. Van Assche W., Magnus A. Proc. Amer. Math. Soc., **106**, 163–175 (1989).
5. Lubinsky D. Proc. Amer. Math. Soc., **111**, 413–420 (1991).
6. Рахманов Е. А. Матем. сб., **103**, 237–252 (1977).
7. Dombrowski J., Nevai P. SIAM J. Math. Anal., **17**, 752–759 (1986).
8. Nevai P. In: Progress in Approx. Theory, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1992, p. 79–104.
9. Geronimo J., Van Assche W. J. Approx. Theory, **46**, 251–283 (1986).
10. Al-Salam W., Allaway W., Askey R. Trans. Amer. Math. Soc., **284**, 39–55 (1984).
11. Ismail M. E. H. SIAM J. Math. Anal., **16**, 1093–1113 (1985).
12. Charris J., Ismail M. E. H. SIAM J. Math. Anal., **18**, 1177–1218 (1987).
13. Geronimo J., Van Assche W. J. Approx. Theory, **65**, 341–371 (1991).
14. Бржецка В. Ф. Записки НИИ матем. и мех. ХГУ и ХМО, **17**, 75–98 (1940).
15. Барков Г. И. Известия ВУЗов, Матем., **4**, 3–16 (1960).