Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, Об условиях конечности точечного спектра в несамосопряженной модели Фридрихса, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 4, 83–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa500>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 07:48:49

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. (а) $\mathcal{D}(\pi) \subset H^w(X_1) \cap H^w(X_2)$;

(б) операторы X_1, X_2 определяют самосопряженное представление на $\mathcal{D}(\pi^*) \supset \mathcal{D}(\pi)$.

Определим функтор F из категории $\mathcal{R}(\mathfrak{B})$ в категорию $\mathcal{R}(\mathfrak{A})$ следующим образом:

- если ρ — представление $*$ -алгебры $\mathfrak{B}$, $\rho(a) = A$, $\rho(b) = B$, то $F(\rho) = \pi^*$ (π^* — представление $*$ -алгебры $\mathfrak{A}$ на $\mathcal{D}(\pi^*)$), порожденное операторами $X_i|_{\mathcal{D}(\pi^*)}$, $i = 1, 2$;
- если $C: \mathcal{H}(\rho) \rightarrow \mathcal{H}(\hat{\rho})$, $CA = \hat{A}C$, $CB = \hat{B}C$, то

$$F(C) = \mathcal{C} = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \otimes I_{L_2(\mathbb{R}, dx)}.$$

ТЕОРЕМА 2. Функтор F строгий и полный.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кругляк С. А., Самойленко Ю. С. Функц. анализ и его прил., **14**, вып. 1, 60–62 (1980).
2. Пирятинская А. Ю., Самойленко Ю. С. Укр. матем. ж., **47**, № 1, 70–78 (1995).
3. Kruglyak S., Piryatinskaya A. Preprint, Institut Mittag-Leffler (1996).
4. Schmüdgen K. Unbounded operator algebras and representation theory, Akademie-Verlag, Berlin, 1990.
5. Nelson E. Ann. Math. **70**, No. 3, 572–615 (1959).
6. Nizhnik L. P., Turowska L. B. Methods of Func. Anal. and Topol. В печати.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию
11 сентября 1996 г.

УДК 517.9

Об условиях конечности точечного спектра в несамосопряженной модели Фридрихса*

© 1997. С. А. СТЕПИН

В работе изучается точечный спектр σ_p операторов в $L_2(l)$, $l = [a, b] \subset \mathbb{R}$, вида $H = H_0 + V$, где H_0 — оператор умножения на независимую переменную, а возмущение V — интегральный оператор с ядром v , удовлетворяющим некоторым условиям гладкости.

Известно (см. [1–3]), что спектральные свойства операторов самосопряженной модели Фридрихса существенно зависят от степени гёльдеровской гладкости ядра возмущения. В этих терминах границы конечности сингулярного спектра служит показатель гёльдеровости $1/2$. В несамосопряженном случае даже при условии бесконечной дифференцируемости ядра v может происходить сгущение собственных значений к отрезку l ; в [4] построен соответствующий пример и исследована структура множества точек накопления собственных значений.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 96-01-00333).

Для однопараметрического семейства операторов $H(\alpha) = H_0 + V(\alpha)$ специального вида в работе автора [5] предложен способ доказательства конечности точечного спектра, использующий вариацию параметра α и основанный на соображениях аналитической теории возмущений. Этот подход удается распространить на достаточно общую операторную ситуацию, оставаясь в рамках несамосопряженной модели Фридрихса. Отметим, в этой связи, что аналитическая теория возмущений, строго говоря, неприменима к собственным значениям, погруженным в непрерывный спектр; возникающие при этом эффекты изучались в [6].

Введем в рассмотрение класс $\mathfrak{h}^\mu$, $0 < \mu \leq 1$, функций $\varphi: l \rightarrow \mathbb{C}$, для которых

$$\|\varphi\|_\mu = \sup_{\omega \neq \omega'} \left\{ |\varphi(\omega)| + \frac{|\varphi(\omega) - \varphi(\omega')|}{|\omega - \omega'|^\mu} \right\} < \infty.$$

В $L_2(l)$ рассматривается однопараметрическое семейство операторов модели Фридрихса $H(\alpha) = H_0 + V(\alpha)$, где $V(\alpha)$ — интегральный оператор с ядром $v(\omega, \omega', \alpha)$, а α — комплексный параметр; предполагается, что при фиксированном α ядро $v(\alpha): l \times l \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\|v(\alpha)\|_\mu = \sup_{\omega' \in l} \|v(\cdot, \omega', \alpha)\|_\mu + \sup_{\omega \in l} \|v(\omega, \cdot, \alpha)\|_\mu < \infty, \quad \mu > 0, \quad (1)$$

$$v(a, \omega', \alpha) = v(b, \omega', \alpha) = v(\omega, a, \alpha) = v(\omega, b, \alpha) = 0. \quad (2)$$

Задача отыскания собственных значений оператора $H(\alpha)$, лежащих вне l , сводится к вопросу о разрешимости в $\mathfrak{h}^\nu$, $\nu > 0$, уравнения

$$\varphi(\omega) + K(\lambda, \alpha)\varphi(\omega) = 0, \quad (3)$$

где $K(\lambda, \alpha) = V(\alpha)(H_0 - \lambda E)^{-1}$. Уравнение (3) естественно рассматривать для значений λ , принадлежащих комплексной плоскости с разрезом l , различая при этом края разреза; другими словами, область Π изменения спектрального параметра λ представляет собой поверхность с краем, полученную пополнением $\mathbb{C} \setminus l$ относительно метрики $\rho(\lambda, \lambda')$, определяемой как точная нижняя грань длин кривых, соединяющих λ и λ' и не пересекающих отрезок l . Если $\lambda = c \pm i0 \in \partial\Pi$, то для $\varphi \in \mathfrak{h}^\nu$, $\nu > 0$, имеем

$$K(c \pm i0, \alpha)\varphi(\omega) = \text{v. p.} \int_l \frac{v(\omega, \omega', \alpha)\varphi(\omega')}{\omega' - c} d\omega' \pm i\pi v(\omega, c, \alpha)\varphi(c).$$

Обозначим через $\Lambda(\alpha)$ множество значений параметра $\lambda \in \Pi$, при которых (3) имеет нетривиальное решение в классе $\mathfrak{h}^\nu$, $\nu > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (ср. [7]). Для каждого $\lambda \in \Pi$ и произвольного $\nu \in (0, \mu)$ оператор $K(\lambda, \alpha)$ компактен в $\mathfrak{h}^\nu$ и гёльдеровски непрерывно зависит от $\lambda \in \Pi$ в соответствующей операторной норме.

СЛЕДСТВИЕ. Множество $\Lambda(\alpha) \subset \Pi$ замкнуто.

Учитывая тот факт, что $\sigma_p(H(\alpha)) \subset \Lambda(\alpha)$, приходим к следующему выводу: точки накопления собственных значений оператора $H(\alpha)$ принадлежат множеству $\Omega(\alpha) := \Lambda(\alpha) \cap \partial\Pi$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ядро $v(\omega, \omega', \alpha)$ удовлетворяет условиям (1)–(2) и, кроме того, аналитично по параметру α относительно нормы $\|\cdot\|_\mu$ в некоторой комплексной окрестности $O(\alpha_0)$ точки $\alpha = \alpha_0$. Если множество

$\bigcup_{\alpha \in O(\alpha_0)} \Omega(\alpha)$ конечно и $\bigcap_{\alpha \in O(\alpha_0)} \Omega(\alpha) = \emptyset$, то точечный спектр оператора $H(\alpha_0)$ конечен.

Допустим, что множество собственных значений оператора $H(\alpha_0)$ бесконечно и, таким образом, имеет точку сгущения $c \in l$; для определенности будем считать, что c — внутренняя точка отрезка l и накопление происходит из верхней полуплоскости так, что $c + i0 \in \Omega(\alpha_0)$. Те значения $\alpha \in O(\alpha_0)$, для которых $c + i0 \in \Omega(\alpha)$, будем называть особыми точками.

Операторы $K(c + i0, \alpha)$, $\alpha \in O(\alpha_0)$, компактны в $\mathfrak{h}^\nu$, $\nu \in (0, \mu)$, и образуют голоморфное семейство. Согласно известному результату аналитической теории возмущений (см. [8]), либо все $\alpha \in O(\alpha_0)$ суть особые точки, либо каждое компактное подмножество из $O(\alpha_0)$ содержит лишь конечное число особых точек. Поскольку $\bigcap_{\alpha \in O(\alpha_0)} \Omega(\alpha) = \emptyset$, то реализуется вторая возможность и, следовательно, найдется окрестность $\tilde{O}(\alpha_0) \subset O(\alpha_0)$, не содержащая других особых точек, кроме α_0 . Ввиду конечности множества $\bigcup_{\alpha \in O(\alpha_0)} \Omega(\alpha)$ существует интервал $\Delta \subset \partial\Pi$, такой, что

$$\Omega(\alpha_0) \cap \Delta = \{c + i0\} \quad \text{и} \quad \bigcup_{\alpha \in \tilde{O}(\alpha_0), \alpha \neq \alpha_0} \Omega(\alpha) \cap \Delta = \emptyset.$$

Применение схемы доказательства теоремы 1 работы [5] с учетом сделанного наблюдения приводит к противоречию с предположением о бесконечности $\sigma_p(H(\alpha_0))$.

В качестве приложения рассмотрим оператор модели Фридрихса в случае одномерного возмущения

$$v(\omega, \omega', \alpha) = p(\omega)q(\omega', \alpha), \quad (4)$$

где $p(\cdot)$, $q(\cdot, \alpha) \in \mathfrak{h}^\mu$, $\mu > 0$, $p(a) = p(b) = q(a, \alpha) = q(b, \alpha) = 0$ и $v(\omega, \omega, \alpha) \in \mathbb{R}$, $\omega \in l$; кроме того, предполагается, что функция $q(\cdot, \alpha)$ аналитична по параметру α относительно нормы $\|\cdot\|_\mu$.

Необходимое условие разрешимости уравнения (3), отвечающего $\lambda = c \pm i0$, имеет вид (см. [9])

$$1 + \text{v. p.} \int_l \frac{p(\omega)q(\omega, \alpha)}{\omega - c} d\omega \pm i\pi p(c)q(c, \alpha) = 0,$$

и, стало быть, $p(c)q(c, \alpha) = 0$, когда $c + i0$ или $c - i0$ принадлежит $\Omega(\alpha)$. Таким образом, если для $\alpha = \alpha_0$ найдется окрестность $O(\alpha_0)$, такая, что множество $\{\omega \in l : p(\omega)q(\omega, \alpha) = 0, \alpha \in O(\alpha_0)\}$ конечно и $\bigcap_{\alpha \in O(\alpha_0)} \Omega(\alpha) = \emptyset$, то конечен точечный спектр оператора $H(\alpha_0)$ с возмущением, задаваемым ядром (4).

Последнее реализуется, например, в случае, когда зависимость от параметра α в (4) линейная: $q(\omega, \alpha) = \alpha q(\omega)$; здесь в качестве $O(\alpha_0)$ надо взять область, содержащую точки $\alpha = 0$ и $\alpha = \alpha_0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p, q \in \mathfrak{h}^\mu$, $\mu > 0$, $p(a) = p(b) = q(a) = q(b) = 0$, причем $p(\omega)q(\omega)$ вещественнозначна и имеет конечное число нулей на $l = [a, b]$. Тогда точечный спектр оператора $H = \omega \cdot + p(\omega)(\cdot, \bar{q})_{L_2(l)}$ состоит из конечного множества собственных значений.

Автор благодарит Р. А. Минлоса за полезные обсуждения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фаддеев Л. Д.* Труды МИАН, **73**, 292–313 (1964).
2. *Павлов Б. С., Петрас С. В.* Функц. анализ и его прил., **4**, вып. 2, 54–61 (1970).
3. *Дынькин Е. М., Набоко С. Н., Яковлев С. И.* Алгебра и анализ, **3**, вып. 2, 77–90 (1991).
4. *Набоко С. Н.* Зап. науч. сем. ЛОМИ, **39**, 40–58 (1974).
5. *Степин С. А.* Известия РАН, **60**, № 6, 201–221 (1996).
6. *Howland J. S.* Pacif. J. Math., **55**, 157–174 (1974).
7. *Yafaev D. R.* Mathematical scattering theory. Transl. Math. Monographs, Vol. 105, Am. Math. Soc., 1992.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. Мир, М., 1972.
9. *Фридрихс К. О.* Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. Мир, М., 1969.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
4 февраля 1997 г.

УДК 517.518

Ортогональные всплески на локально компактных абелевых группах

© 1997. Ю. А. ФАРКОВ

1. Пусть G — локально компактная абелева группа, μ — мера Хаара на G , $L^2(G) := L^2(G, \mu)$, H — дискретная подгруппа в G , такая, что факторгруппа G/H компактна, A — автоморфизм группы G , такой, что $A(H)$ — собственная подгруппа в H , и $s := \text{card}(H/A(H))$. В предположении, что функция $\varphi \in L^2(G)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(g) = \sum_{h \in H} b(h) \varphi(Ag - h), \quad b \in L^2(H), \quad g \in G, \quad (1)$$

положим

$$V(\varphi) := \text{clos}_{L^2(G)} \text{span} \{ \varphi(\cdot - h) \mid h \in H \},$$

$$V_j := \{ f(A^j \cdot) \mid f \in V(\varphi) \}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Из (1) следует, что $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Ортогональное дополнение к V_j в V_{j+1} обозначается через W_j .

ЗАДАЧА А. Найти функции $\psi_1, \dots, \psi_{s-1}$ в $L^2(G)$, такие, что W_0 является прямой суммой подпространств

$$W_0^{(i)} := \text{clos}_{L^2(G)} \text{span} \{ \psi_i(\cdot - h) \mid h \in H \}, \quad i = 1, \dots, s-1.$$

Относительно способов решения этой задачи при построении всплесковых базисов в $L^2(\mathbb{R}^d)$ см., например, [1, 2]. Пару (G, A) будем называть *допустимой*, если 1) группа G метризуема, причем выполняется вторая аксиома счетности, и 2) автоморфизм A непрерывен, а его обратный A^{-1} является сжатием. Некоторые примеры допустимых пар (G, A) с $G \neq \mathbb{R}^d$ даны в [3].