Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Шварцман, Кручение в факторгруппе группы кос Артина–Брискорна по центру и регулярные числа Спрингера, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 1, 39–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa502>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:12:24

УДК 512.543+515.25

Кручение в факторгруппе группы кос Артина–Брискорна по центру и регулярные числа Спрингера

© 1996. О. В. ШВАРЦМАН¹

Цель статьи — выяснить топологический смысл группы кос Артина–Брискорна, профакторизованной по центру, и найти порядки элементов кручения в указанной факторгруппе. Теорема Мурасуги о кручении в факторгруппе $B(n)/Z(B(n))$ группы кос Артина $B(n)$ по центру $Z(B(n))$ является частным случаем наших результатов при $n \geq 5$.

§1. Определения, обозначения, факты

1.1. На протяжении всей статьи V будет обозначать комплексное векторное пространство, $P = P(V)$ — ассоциированное проективное пространство и $\pi: V - \{0\} \rightarrow P$ — естественную проекцию.

В ситуации когда группа Γ действует на пространстве X , множество точек $x \in X$ с нетривиальным стабилизатором Γ_x будет обозначаться через $\text{Fix}(\Gamma, X)$ или просто $\text{Fix} \Gamma$, если из контекста ясно, о каком пространстве X идет речь. Для группы линейных преобразований Γ пространства V соответствующая группа проективных преобразований пространства P обозначается через $P\Gamma$. Проективизацию линейного преобразования γ мы тоже будем обозначать через $P(\gamma)$. Группа $P\Gamma$ изоморфна факторгруппе группы Γ по центру $Z(\Gamma)$.

1.2. Линейное преобразование γ пространства V называется *отражением*, если его порядок конечен и $\text{codim}_{\mathbb{C}} \text{Fix} \gamma = 1$.

Гиперплоскость неподвижных точек отражения γ будем называть его *зеркалом*. Пусть W — конечная линейная группа, порожденная отражениями, действующая в r -мерном комплексном векторном пространстве V . Факторпространство V/W изоморфно комплексному векторному пространству $\mathbb{C}^r$. Кано-ническая проекция $\varphi: V \rightarrow V/W$ записывается в координатах формулами

$$y_i = P_i(x_1, \dots, x_r), \quad i = 1, \dots, r. \quad (1)$$

Однородные многочлены $P_i(x_1, \dots, x_r)$ степеней m_i ($i = 1, \dots, r$), участвующие в этих формулах, свободно порождают алгебру инвариантов $\mathbb{C}[V]^W$ [1].

В дальнейшем, специально этого не оговаривая, мы сохраняем обозначение φ и для сужений проекции φ на различные объекты в V . Пусть A — объединение в V зеркал всех отражений из группы W . Вне связи гиперплоскостей A

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Американского математического общества.

группа W действует свободно, т.е. $\text{Fix } W = A$. Обозначим через Y факторпространство $(V - A)/W$. Отметим, что Y — комплексное многообразие.

Группа W называется *группой Кокстера* или группой, порожденной вещественными отражениями, если векторное пространство V является комплексификацией вещественного векторного пространства $V(\mathbb{R})$, в котором действует группа W .

1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вектор $x \in V$ называется *W -регулярным*, если $x \notin \text{Fix } W$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элемент $w \in W$ называется *регулярным*, если существует W -регулярный вектор x , собственный для линейного преобразования w .

Рассмотрим множество $\text{Ord}(W_{\text{reg}})$, состоящее из порядков всех регулярных элементов группы W . Вместе с любым порядком в это множество входят и все его делители.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Регулярным набором Спрингера* $(r_1, \dots, r_m)$ называется множество максимальных элементов в $\text{Ord}(W_{\text{reg}})$ по отношению делимости [13].

Переходя к группе PW , естественно определить *модифицированный регулярный набор* Спрингера. Такой набор $(\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_m)$ получается из исходного по правилу

$$\hat{r}_i = r_i / (|Z(W)|, r_i)$$

(используются стандартные обозначения: (a, b) — для НОД(a, b) и $|Z|$ — для числа элементов в множестве Z).

1.4. Фундаментальная группа $\pi_1(Y)$ (соответственно фундаментальная группа $\pi_1(V - A)$) пространства Y называется *группой обобщенных кос Артина–Брискорна* (соответственно *группой обобщенных крашенных кос*) и обозначается $B(W)$ (соответственно $C(W)$). В дальнейшем мы будем говорить просто о *группе кос* $B(W)$ или *группе крашенных кос* $C(W)$. Группа крашенных кос является нормальной подгруппой группы кос. Отметим, что в группе кос нет кручения [2].

§2. Результаты

Пусть G — конечная группа проективных преобразований пространства P , порожденная отражениями. Среди действующих в пространстве V конечных линейных групп Γ , порожденных отражениями и таких, что $P\Gamma = G$, выберем единственную максимальную (по включению) группу W [12]. Введем в рассмотрение следующие пространства:

$$\hat{A} = \pi(A), \quad \hat{P} = P - \text{Fix}(G, P), \quad \hat{V} = \pi^{-1}(\hat{P}), \quad \hat{X} = \hat{P}/G, \quad \hat{Y} = \hat{V}/W.$$

Предположим, что W — неприводимая группа Кокстера в пространстве V . В этом случае будут доказаны две теоремы.

ТЕОРЕМА А. *Фундаментальная группа $\pi_1(\hat{X})$ пространства $\hat{X}$ изоморфна группе $B(W)/Z(B(W))$.*

ТЕОРЕМА В. *Пусть γ — элемент конечного порядка t в группе $\pi_1(\hat{X})$. Тогда t делит одно из чисел модифицированного набора Спрингера группы W . Обратно, для любого делителя t какого-либо из чисел $\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_m$ существует элемент $\gamma \in \pi_1(\hat{X})$, порядок которого равен t .*

СЛЕДСТВИЕ [10]. При $n \geq 5$ в группе $B(n)/Z(B(n))$ элемент данного конечного порядка t существует тогда и только тогда, когда t делит одно из чисел $n - 1$, n .

§3. Доказательство

3.1. Для доказательства теоремы А требуются приготовления.

ЛЕММА 1. Фундаментальные группы пространств Y и $\hat{Y}$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $\hat{Y}$ получается из многообразия Y удалением аналитического подмножества $\pi^{-1}(\text{Fix}(G, P - \hat{A}))/W$ комплексной коразмерности ≥ 2 (здесь мы воспользовались максимальной группой W). В таком случае, согласно известному топологическому факту, фундаментальные группы $\pi_1(\hat{Y})$ и $\pi_1(Y)$ совпадают. Лемма доказана.

Совершенно по тем же причинам совпадают и фундаментальные группы пространств $V - A$ и $\hat{V}$.

ЛЕММА 2. Пространство $P - \hat{A}$ является пространством типа $K(\pi, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тем фактом, что пространство $V - A$, а следовательно, и пространство $\hat{V}$ являются пространствами типа $K(\pi, 1)$ [4, 7]. Легко показать, что у естественного $\mathbb{C}^*$ -расслоения $\pi: V - A \rightarrow P - \hat{A}$ есть сечение. Следовательно, для всех $i \geq 2$ имеется разложение в прямую сумму (см. [3]) $\pi_i(V - A) = \pi_i(P - \hat{A}) \oplus \pi_i(\mathbb{C}^*)$. Поскольку у $\mathbb{C}^*$ все гомотопические группы, начиная со второй, тривиальны, то лемма 2 доказана.

Вернемся к $\mathbb{C}^*$ -расслоению $\pi: V - A \rightarrow P - \hat{A}$ и запишем с учетом результата леммы 2 фрагмент точной гомотопической последовательности расслоения:

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*) \xrightarrow{\mu} \pi_1(V - A) \rightarrow \pi_1(P - \hat{A}) \rightarrow 1.$$

Наша ближайшая цель — вычислить образ группы Z (фундаментальной группы слоя) при ее вложении μ в группу $C(W) = \pi_1(V - A)$ (а значит, и в группу $B(W)$). Но прежде, чем следовать дальше, уместно сделать

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если центр группы W изоморфен $\mathbb{Z}_2$, то центр группы кос $Z(B(W))$ — это циклическая группа $\langle \Delta \rangle$, порожденная фундаментальным элементом Δ . Если же центр группы W тривиален, то центр $Z(B(W))$ совпадает с циклической группой $\langle \Delta^2 \rangle$ [6, 7]. В любом случае элемент Δ^2 лежит в центре группы кос.

ЛЕММА 3. Образ $\mu(\pi_1(\mathbb{C}^*))$ в группе $C(W)$ совпадает с циклической подгруппой $\langle \Delta^2 \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H — зеркало вещественного отражения w из группы W . Выберем в пространстве $V(\mathbb{R})$ точку $Q \notin H$ и рассмотрим комплексную прямую L в V , соединяющую точки Q и $Q' = w(Q)$. Обозначим через $l(Q, Q')$ путь в V , состоящий из направленного вещественного отрезка QQ' , у которого «маленькая» ε -окрестность точки $L \cap H$ заменена «верхней» полуокружностью R^+ радиуса ε , лежащей в L . Элемент σ фундаментальной группы $\pi_1(\varphi(Q), Y)$, соответствующий пути $l(Q, Q')$, назовем w -стандартным.

Пусть K — фундаментальная камера Вейля группы W в пространстве $V(\mathbb{R})$, а $S = \{w_1, \dots, w_r\}$ — порождающие эту группу отражения в гиперплоскостях, ограничивающих камеру K . Зафиксируем внутри камеры K точку Q_0 . Согласно Брискорну, w_i -стандартные элементы σ_i порождают фундаментальную группу $\pi_1(\varphi(Q_0), Y)$, изоморфную группе кос $B(W)$ [5]. Рассмотрим в группе (W, S) элемент $\bar{\Delta}$ максимальной длины q [1]. Пусть $\bar{\Delta} = \prod_{i=1}^q w_{s_i}$ — запись элемента $\bar{\Delta}$ через образующие $w_1, \dots, w_r$. Тогда фундаментальный элемент Δ записывается с помощью образующих $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ словом $\prod_{i=1}^q \sigma_{s_i}$ [6–8]. Удобно ввести элементы $\bar{\Delta}_j = \prod_{i=1}^j w_{s_i}$ ($j = 1, \dots, q$) в группе W и соответственно элементы $\Delta_j = \prod_{i=1}^j \sigma_{s_i}$ в группе кос.

Известно, что $\bar{\Delta}(K) = -K$. Соединим камеры K и $-K$ цепочкой смежных камер $K, \bar{\Delta}_1(K), \dots, \bar{\Delta}_q K = -K$ ($\bar{\Delta}_0 = \text{id}$ и $\bar{\Delta}_q = \bar{\Delta}$). Переход из камеры $\bar{\Delta}_{j-1}K$ в смежную камеру $\bar{\Delta}_j(K)$ осуществляется с помощью отражения $\bar{\Delta}_{j-1}w_{s_j}\bar{\Delta}_{j-1}^{-1}$ в их общей грани H_j . Но множество гиперплоскостей $\{H_j\}$ — это множество зеркал всех отражений из группы W [1]. Поэтому в множестве всех зеркал A возникает естественный порядок $H_1 < \dots < H_q$.

Далее, рассмотрим точки $Q_j = \bar{\Delta}_j(Q_0)$ и кривые $l_j = l(Q_{j-1}, Q_j)$ ($j = 1, \dots, q$). Кривая l_j представляет в фундаментальной группе $\pi_1(\varphi(Q_0), Y)$ стандартную образующую σ_{s_j} . Совершим в пространстве $V - A$ обход O_j гиперплоскости H_j по следующему правилу: из точки Q_0 проходим до точки Q_j , двигаясь по цепочке кривых $l_1, \dots, l_j$, затем проходим путь l_j в обратном направлении с той лишь разницей, что точку $H_j \cap L_j$ обходим в L_j по «нижней» полукружности R_j^- , после чего из точки Q_{j-1} возвращаемся в Q_0 , проходя прежний путь в обратном направлении. Прямое вычисление показывает, что построенный обход гиперплоскости H_j соответствует элементу $\alpha_j = \Delta_{j-1}\sigma_{s_j}^2\Delta_{j-1}^{-1}$ фундаментальной группы $\pi_1(\varphi(Q_0), Y)$, а произведение всех обходов $\prod_{j=1}^q O_j$ — элементу $\alpha = \sigma_{s_1} \cdots \sigma_{s_q} \sigma_{s_q} \cdots \sigma_{s_1}$. Ввиду того что $\sigma_{s_1} \cdots \sigma_{s_q} = \sigma_{s_q} \cdots \sigma_{s_1}$ ([6, лемма 5.1]), $\alpha = \Delta^2$.

Воспользуемся, наконец, стандартными аргументами Зариского, сведя все к случаю пучка прямых в $\mathbb{C}^2$ (см., например, [11]). Подробнее: за счет выбора точки Q_0 (в силу замечания 1 утверждение леммы от этого выбора не зависит) добьемся того, чтобы вещественный отрезок $[Q_0, \bar{\Delta}(Q_0)]$ пересекал лишь грани коразмерности 1 симплицального разбиения пространства $V(\mathbb{R})$ камерами группы W . Затем рассмотрим комплексную прямую l , проходящую через точки Q_0 и $\bar{\Delta}(Q_0)$, и заменим каждый путь O_j гомотопным ему путем O'_j , лежащим в l (это можно сделать, очевидным образом стягивая «вещественную» часть пути O_j внутри каждой камеры на часть вещественного отрезка $[Q_0, \bar{\Delta}(Q_0)]$, которая лежит в этой камере). Одновременно позаботимся и о том, чтобы пути Q'_j не имели других общих точек, кроме точки Q_0 . Теперь мы рассмотрим комплексную плоскость V' в пространстве V , содержащую прямую l , и индуцированный на ней связкой A пучок прямых $\{m'_j\} = V' \cap A$. Известно, что произведение $O' = \prod_{j=1}^q O'_j$ построенных нами обходов O'_j вокруг точек $c'_j = m'_j \cap l$ служит образующей фундаментальной группы слоя в $\mathbb{C}^*$ -расслоении

$V' - \{m'_j\} \rightarrow l - \{c'_j\}$ (см., например, [11]). А так как $\alpha = O'$ по построению, то лемма 3 доказана.

Бесхитростной проверкой определений с помощью формулы (1) доказывается

ЛЕММА 4. *Регулярное неразветвленное накрытие $\varphi: \hat{V} \rightarrow \hat{Y}$ является морфизмом главных $\mathbb{C}^*$ -расслоений $\pi: \hat{V} \rightarrow \hat{P}$ и $\hat{\pi}: \hat{Y} \rightarrow \hat{X}$.*

Действие группы $\mathbb{C}^$ на пространстве Y задается в координатах $y_1, \dots, y_r$ (см. п. 1.2) формулой*

$$t(y_1, \dots, y_r) = (t^{m_1} y_1, \dots, t^{m_r} y_r), \quad t \in \mathbb{C}^*.$$

На слоях отображение φ является регулярным неразветвленным накрытием $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ степени, равной $|Z(W)|$. Объяснить это можно так: по определению пространства $\hat{V}$ никакой вектор из $\hat{V}$ не является собственным вектором элемента из группы W , отличного от элемента центра.

Запишем фрагмент коммутативной диаграммы точных гомотопических последовательностей расслоений, связанной с морфизмом φ :

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{C}^*) & \xrightarrow{\mu} & \pi_1(\hat{V}) & \longrightarrow & \pi_1(\hat{P}) & \longrightarrow 1 \\ & \varphi^* \downarrow & & \tau \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{C}^*) & \xrightarrow{\hat{\mu}} & \pi_1(\hat{Y}) & \longrightarrow & \pi_1(\hat{X}) & \longrightarrow 1 \end{array} \quad (2)$$

Отметим, что отображения φ^* и τ являются мономорфизмами.

Если центр группы W тривиален, то φ^* — изоморфизм, а если порядок центра равен 2, то образ отображения φ^* — подгруппа индекса 2. В первом случае диаграмма (2) вместе с результатом леммы 3 показывают, что образ $\hat{\mu}(\pi_1(\mathbb{C}^*))$ в группе $\pi_1(\hat{Y}) = B(W)$ совпадает с подгруппой $\langle \Delta^2 \rangle$, а во втором — что этот образ порождается таким элементом $\delta \in B(W)$, что $\delta^2 = \Delta^2$. Но так как при этом элемент Δ лежит в центре группы $B(W)$ (см. замечание 1), то $\delta = \Delta$. В противном случае мы обнаружили бы 2-кручение в группе $B(W)$, свободной от кручения. Итак, в обоих случаях фундаментальная группа $\pi_1(\hat{X})$ изоморфна группе $B(W)/Z(B(W))$. $\square$

3.2. Доказательство теоремы В удобно разбить на две части. Сначала рассмотрим общую ситуацию, когда на связном гладком многообразии M дискретно действует группа автоморфизмов Γ . Пусть $\psi: M \rightarrow M/\Gamma$ — естественное отображение и $p: \tilde{M} \rightarrow M$ — универсальное накрытие многообразия M . Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ группу автоморфизмов универсальной накрывающей $\tilde{M}$, состоящую из всевозможных подъемов $\tilde{\gamma}$ элементов γ из Γ . отождествляя фундаментальную группу $\pi_1(M)$ с группой скольжений универсального накрытия, получаем точную последовательность групп $1 \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \tilde{\Gamma} \xrightarrow{\tilde{p}} \Gamma \rightarrow 1$ (см., например, [9]).

ЛЕММА 5. *Для любой точки $\tilde{x} \in \tilde{M}$ каноническая проекция $\tilde{p}$ изоморфно отображает стабилизатор $\tilde{\Gamma}_{\tilde{x}}$ точки $\tilde{x}$ на стабилизатор Γ_x точки $x = p(\tilde{x}) \in M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подъем $\tilde{\gamma}$ любого элемента $\gamma \in \Gamma$ определяется однозначно, если указать образ фиксированной точки $\tilde{x} \in \tilde{M}$ при действии $\tilde{\gamma}$, причем этим образом может служить любая точка слоя $p^{-1}(\gamma(p(\tilde{x})))$. По этой причине стабилизатор точки $x \in M$ вкладывается в стабилизатор любой точки $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Принимая во внимание, что $\tilde{p}(\tilde{\Gamma}_{\tilde{x}}) \subset \Gamma_x$, получаем утверждение леммы.

Перед тем как доказывать ключевую лемму 6, договоримся через $|g|$ обозначать порядок элемента группы.

ЛЕММА 6. *Предположим, что гладкое многообразие M и дискретная группа его автоморфизмов Γ обладают следующими дополнительными свойствами:*

- (a) M — пространство типа $K(\pi, 1)$;
- (b) любой элемент конечного порядка из группы Γ имеет неподвижную точку при действии на M ;
- (c) $\text{codim}_{\mathbb{R}} \text{Fix}(\Gamma, M) \geq 3$.

Тогда

- 1. Если $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$ — элемент конечного порядка и $\gamma = \tilde{p}(\tilde{\gamma})$, то $|\gamma| = |\tilde{\gamma}|$.
- 2. Для любого элемента конечного порядка $\gamma \in \Gamma$ найдется такой элемент $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$, что $\tilde{p}(\tilde{\gamma}) = \gamma$ и $|\tilde{\gamma}| = |\gamma|$.
- 3. Фундаментальная группа пространства $M/\Gamma = \psi(\text{Fix } \Gamma)$ изоморфна группе $\tilde{\Gamma}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $\tilde{\gamma}$ — элемент конечного порядка из группы $\tilde{\Gamma}$. Тогда $\tilde{\gamma}$ имеет неподвижную точку $\tilde{x}$ при действии на $\tilde{M}$, поскольку M — пространство типа $K(\pi, 1)$ [3]. Следовательно, элемент $\gamma = \tilde{p}(\tilde{\gamma})$ из группы Γ оставляет неподвижной точку x , и $|\tilde{\gamma}| = |\gamma|$ по лемме 5.

2. Если γ — элемент конечного порядка из Γ и x — его неподвижная точка в M , то для любой точки $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ в стабилизаторе $\tilde{\Gamma}_{\tilde{x}}$ есть элемент $\tilde{\gamma}$ порядка $|\gamma|$ (снова лемма 5).

3. Еще раз воспользуемся тем фактом, что многообразие $\tilde{M}$ остается односвязным, если из него удалить подмногообразие $p^{-1}(\text{Fix}(\Gamma, M))$ вещественной коразмерности ≥ 3 .

Второй шаг доказательства теоремы В объясняет связь порядков элементов кручения в фундаментальной группе $\pi_1(\hat{X})$ с модифицированным набором Спрингера.

Назовем элемент g группы G *регулярным*, если у него есть неподвижная точка в пространстве $P - \hat{A}$. Обозначим через $w(g)$ элемент из группы W , такой, что $P(w(g)) = g$. Ясно, что $w(g)$ является W -регулярным элементом.

ЛЕММА 7. *Предположим, что $|w(g)| = d$, а порядок центра группы W равен m . Тогда порядок элемента g равен $d/(d, m)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если два элемента w_1 и w_2 из W имеют общий регулярный собственный вектор $v \in V$ с одинаковыми собственными значениями, то они равны. В самом деле, тогда элемент $w_1 w_2^{-1}$ имеет неподвижный регулярный вектор v и, следовательно, $w_1 = w_2$. Таким образом, утверждение о порядке элемента g следует из хорошо известных свойств группы корней из единицы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Порядки регулярных элементов группы G — это делители модифицированного набора Спрингера группы G и только они.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle r_1, \dots, r_m \rangle$ — регулярный набор Спрингера группы W и d — делитель некоторого r_k , $1 \leq k \leq m$. Тогда регулярный элемент порядка d в группе W дает нам по лемме 7 регулярный элемент порядка $d/(d, m)$ в группе G . Так как $d/(d, m)$ — делитель числа $r_k/(r_k, m)$, то в одну сторону предложение доказано. В обратную сторону: пусть t — делитель некоторого числа $\hat{r}_k = r_k/(r_k, m)$. Тогда $t \cdot (t, m)$ — делитель r_k , и регулярный элемент порядка $t \cdot (t, m)$ в группе W имеет порядок t в группе G . $\square$

Наконец, выбрав в лемме 6 в качестве M пространство $P - \hat{A}$, в качестве Γ — конечную группу G автоморфизмов $K(\pi, 1)$ -пространства $P - \hat{A}$ (лемма 2!) и сопоставив результаты леммы 6 и предложения 1, мы докажем теорему В.

3.3. Чтобы доказать следствие, рассмотрим симметрическую группу S_n в ее стандартном кокстеровском представлении в пространстве V размерности $n - 1$. Так как центр симметрической группы тривиален, то проективная группа $G = PS_n$ изоморфна группе S_n . Изоморфна S_n и максимальная группа W , но только при $n \geq 5$ (по этому поводу см. п. 1 §4). Регулярный набор Спрингера группы S_n равен $(n - 1, n)$ [13]. Следовательно, по теоремам А и В при $n \geq 5$ порядки элементов кручения в группе $B(n)/Z(B(n))$ — это ровно все делители чисел $n - 1$ и n , что и требовалось доказать.

§4. Комментарии и гипотеза

1. Рассматривая классификационные таблицы Шепарда–Тодда [12] неприводимых линейных групп, порожденных отражениями, нетрудно убедиться в следующем.

Пусть $\widetilde{W}$ — неприводимая группа Кокстера в пространстве V размерности r . Тогда максимальная линейная группа W (см. §2) для группы $G = P\widetilde{W}$ совпадает с $\widetilde{W}$, если $r \geq 4$. В размерности 3 единственное исключение представляет группа S_4 : группа W изоморфна группе Вейля системы корней B_3 . Хуже обстоит дело в размерности 2, где каждый элемент конечного порядка становится отражением в проективной группе. Так, например, для группы S_3 группа W изоморфна некокстеровской группе № 7 из списка Шепарда–Тодда [12].

По этой причине наш метод доказательства теоремы Мурасуги, к сожалению, не «работает» в размерностях 2 и 3 ($n = 3$ и $n = 4$ соответственно).

2. Спрингер вычислил регулярные числа для всех неприводимых конечных линейных групп, порожденных отражениями [13].

3. Кроме порядков элементов кручения в группе $B(n)/Z(B(n))$ в работе [10] найдены канонические представители классов сопряженных элементов конечного порядка. Эту часть результатов Мурасуги при $n \geq 5$ несложно получить, скомбинировав результат леммы 5 и три следующих утверждения о действии группы G в пространстве $P - \hat{A}$, первые два из которых фактически доказаны в [13].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Стабилизатор G_x точки $x \in P - \hat{A}$ является циклической группой, порожденной регулярным элементом.*

Точка $x \in P - \hat{A}$ называется s -точкой, если $|G_x| = s$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть g — регулярный элемент порядка d в группе G . Если d делит некоторое число $\hat{r}_j$, $1 \leq j \leq t$, и x — любая $\hat{r}_j$ -точка, то элемент g сопряжен элементу из стабилизатора G_x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $G = S_n$, то все $(n-1)$ -точки (соответственно n -точки) образуют одну S_n -орбиту в $P - \hat{A}$.

Мы не будем здесь детально рассматривать случай группы S_n , надеясь в будущем вернуться к вопросу об описании классов сопряженных элементов кручения в общей ситуации теорем А и В.

4. ГИПОТЕЗА. Теоремы А и В верны без дополнительного предположения о кокстеровости группы W .

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Мир, М. (1972).
2. Лин В. Я. Косы Артина и связанные с ними группы и пространства. Итоги науки и техники. Алгебра, Геометрия, Топология, т. 17, ВИНТИ, М. (1979), с. 159–227.
3. Ху Сы-Цзян. Теория гомотопий. Мир, М. (1964).
4. Brieskorn E. Sur les groupes de tresses (d'après V. I. Arnold). Lect. Notes Math., Vol. 317 (1973), pp. 21–44.
5. Brieskorn E. Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe. Invent. Math., **12**, 57–61 (1971).
6. Brieskorn E., Saito K. Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen. Invent. Math., **17**, 245–271 (1972).
7. Deligne P. Les immeubles des groupes de tresses generalises. Invent. Math., **17**, 273–302 (1972).
8. Garside F. The braid group and other groups. Quart. J. Math. Oxford., **20**, 235–254 (1969).
9. Maskit B. Kleinian Groups. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1988).
10. Murasugi K. Seifert fibre spaces and braid groups. Proc. London Math. Soc., **44**, 71–84 (1982).
11. Orlic P., Terao H. Arrangements. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1992).
12. Shephard G., Todd J. Finite unitary reflection groups. Can. J. Math., **6**, 274–304 (1954).
13. Springer T. Regular elements of finite reflection groups. Invent. Math., **25**, 159–198 (1974).

Московский технический университет
связи и информатики
Московский независимый университет

Поступило в редакцию
15 июня 1994 г.