Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Шмелев, Симплектические связности на
расслоениях регулярных орбит присоединенных
представлений простых групп Ли, *Функц. анализ
и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 1, 47–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa503>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:04:55

УДК 515.164.15

Симплектические связности на расслоениях регулярных орбит присоединенных представлений простых групп Ли

© 1996. А. С. ШМЕЛЕВ¹

§1. Введение

Существуют интересные и неизученные связи между симплектической геометрией и теорией критических точек голоморфных функций. Естественным обобщением милноровского расслоения неособых поверхностей уровня функции $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ являются расслоения регулярных орбит присоединенных представлений простых групп Ли (орбиту будем называть регулярной, если элементы этой орбиты не имеют совпадающих собственных чисел). Действительно, в случае $A_1 \cong C_1$ (для группы $SL(2, \mathbb{C}) = Sp(2, \mathbb{C})$) орбита однозначно определяется своим детерминантом $f(\xi) = \det \xi$. Если $\xi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, то в координатах $z_1 = -ia$, $z_2 = \frac{1}{2}(b - c)$, $z_3 = -\frac{i}{2}(b + c)$ функция f принимает вид $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$, и, следовательно, расслоение регулярных орбит $p: E \rightarrow B$ изоморфно милноровскому расслоению функции $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$. В случае $B_1 = SO(3, \mathbb{C})$ касательная алгебра состоит из матриц

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

с характеристическим полиномом $p(\xi)(\lambda) = -\lambda^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\lambda$. Здесь орбита определяется единственным инвариантом $f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2$. Следовательно, и в этом случае расслоение регулярных орбит $p: E \rightarrow B$ изоморфно милноровскому расслоению функции $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

Далее мы будем обозначать через $p: E \rightarrow B$ расслоения регулярных орбит присоединенных представлений классических простых групп Ли (типов A_n , B_n , C_n , D_n), где E есть объединение регулярных орбит. База B и слой F расслоения p будут описаны ниже во всех четырех рассматриваемых случаях. Слой расслоения p является симплектическим многообразием и диффеоморфен как вещественное многообразие касательному расслоению некоторого многообразия флагов M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Связность на расслоении p называется *симплектической*, если для любого пути в базе соответствующее отображение параллельного переноса является симплектоморфизмом.

¹Настоящая работа выполнена при поддержке ISF, грант No. MSD000, и INTAS, грант No. 4373.

Для каждого слоя $F = T_*M$ расслоения p рассмотрим многообразие ориентированных касательных прямых к M , которое будем обозначать S_*M . Полученное расслоение $p_\infty: E_\infty \rightarrow B$, слой которого есть сферическое расслоение S_*M , может быть рассмотрено как бесконечно удаленное подрасслоение расслоения p . Произвольная связность не может быть продолжена на подрасслоение p_∞ , однако для связностей, имеющих такое продолжение, имеет смысл следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Связность на расслоении p называется *тождественной на бесконечности*, если ее продолжение на расслоение p_∞ является тождественной связностью (для любой петли в базе соответствующее отображение параллельного переноса является тождественным).

В работе [1] В. И. Арнольдом был приведен пример плоской симплектической связности, тождественной на бесконечности, на милноровском расслоении функции $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ и поставлен следующий вопрос. Можно ли выбрать гладко зависящие от слоя симплектические структуры на слоях расслоения регулярных орбит присоединенного представления группы $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ так, чтобы на этом расслоении существовала плоская симплектическая связность, тождественная на бесконечности? В настоящей статье доказывается, что для простых групп Ли типов A_n, B_n, C_n, D_n при $n > 1$ расслоение p_∞ нетривиально и, следовательно, на соответствующем расслоении регулярных орбит не существует связности, тождественной на бесконечности, даже не обязательно плоской или симплектической. При $n = 1$ во всех четырех случаях существует плоская симплектическая связность, тождественная на бесконечности. Кроме того, будет построена естественная плоская симплектическая связность для всех рассматриваемых типов групп Ли, не являющаяся тождественной на бесконечности.

§2. Построение плоской симплектической связности на расслоении $p: E \rightarrow B$

Вначале приведем описание базы и слоя расслоения p для каждого из рассматриваемых типов групп (A_n, B_n, C_n, D_n) (см., например, [2]). Для каждой группы G рассматриваемого типа обозначим через $G_{\mathbb{R}}$ соответствующую компактную вещественную форму, а через W — группу Вейля системы корней.

1) Случай A_n . $G = \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{C})$, $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{SU}(n+1)$, $W = S_{n+1}$. Регулярные орбиты — это орбиты матриц вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 0. \quad (1)$$

Объединение E регулярных орбит расслоено над пространством B характеристических полиномов $t^{n+1} + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$ без кратных корней, т. е. над пространством неупорядоченных наборов несовпадающих комплексных чисел $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 0$. Стабилизатор $G_\Lambda \subset \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{C})$ элемента Λ есть подгруппа диагональных матриц. Слой

$$F = \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R})/G_\Lambda = T_*\mathrm{SU}(n+1)/T_*\mathbb{T}^n = T_*(\mathrm{SU}(n+1)/\mathbb{T}^n) = T_*\mathbb{C}F_{n+1},$$

где $\mathbb{C}F_{n+1}$ есть многообразие полных комплексных флагов в $\mathbb{C}^{n+1}$.

2) Случай B_n . $G = \mathrm{SO}(2n+1, \mathbb{C})$, $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{SO}(2n+1, \mathbb{R})$, а W есть полупрямое произведение группы $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ на S_n . Регулярные орбиты — это орбиты матриц вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \Lambda_n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_i = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_i \\ -\lambda_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_i \neq \pm \Lambda_j, \quad \Lambda_i \neq 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Пространство B есть факторпространство пространства упорядоченных наборов несовпадающих комплексных чисел $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \neq 0$, по действию группы W , где первый сомножитель действует, меняя знаки, а второй — перестановками. Стабилизатор G_{Λ} равен $\underbrace{\mathrm{SO}(2, \mathbb{C}) \times \dots \times \mathrm{SO}(2, \mathbb{C})}_n$. Слой F есть

T_*M , где M — многообразие ориентированных флагов в $\mathbb{R}^{2n+1}$ вида

$$\{0\} \subset \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^3 \subset \dots \subset \mathbb{R}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n+1}.$$

3) Случай C_n . $G = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$, $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{Sp}(n)$ — унитарная кватернионная группа, а W есть полупрямое произведение группы $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ на S_n . Регулярные орбиты — это орбиты матриц вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Lambda_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & -\lambda_i \end{pmatrix}, \quad \Lambda_i \neq \pm \Lambda_j, \quad \Lambda_i \neq 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

Пространство B такое же, как в случае B_n . Слой F равен T_*M , где M есть многообразие полных комплексных флагов в $\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{H}^n$, у которых четномерные подпространства являются кватернионными

$$\{0\} \subset \mathbb{C}^1 \subset \mathbb{H}^1 \subset \mathbb{C}^3 \subset \mathbb{H}^2 \subset \dots \subset \mathbb{C}^{2n-1} \subset \mathbb{H}^n.$$

4) Случай D_n . $G = \mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$, $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{SO}(2n, \mathbb{R})$, а W есть полупрямое произведение $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$ на S_n . Регулярные орбиты — это орбиты матриц вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Lambda_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda_i = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_i \\ -\lambda_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_i \neq \pm \Lambda_j, \quad \Lambda_i \neq 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Пространство B есть факторпространство пространства упорядоченных наборов несовпадающих комплексных чисел $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \neq 0$, по действию группы W , где первый сомножитель действует, меняя знаки у четного числа элементов, а второй — перестановками. Слой F равен T_*M , где M есть многообразие ориентированных флагов в $\mathbb{R}^{2n}$ вида

$$\{0\} \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^4 \subset \dots \subset \mathbb{R}^{2n-2} \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

Перейдем к построению плоской симплектической связности на расслоении $p: E \rightarrow B$. Метрика Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g} = T_E G$ индуцирует невырожденную метрику $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ на пространстве расслоения $E \subset \mathfrak{g}$. Определим распределение $\mathcal{D}$ подпространств на E , ортогональных к слоям. Это распределение задает связность на расслоении p .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *$\mathcal{D}$ есть плоская Ad -инвариантная связность с группой голономии W .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ad -инвариантность связности $\mathcal{D}$ вытекает из Ad -инвариантности метрики Киллинга. Пусть N есть подмногообразие в E , состоящее из матриц вида (1) (соответственно (2), (3), (4)) в случае A_n (соответственно B_n , C_n , D_n). Подмногообразие N трансверсально пересекается с каждым слоем и касается распределения $\mathcal{D}$. Подмногообразия $\text{Ad}_A(N)$ для всех $A \in G$ являются максимальными интегральными многообразиями, и, следовательно, распределение $\mathcal{D}$ вполне интегрируемо. $\square$

Теперь будем строить гладкое семейство симплектических форм на слоях расслоения $p: E \rightarrow B$ и плоскую симплектическую связность.

На слое F действует группа голономии W отображениями параллельного переноса связности $\mathcal{D}$. Пусть $P_w: F \rightarrow F$ есть отображение параллельного переноса, соответствующее элементу $w \in W$. Многообразие флагов M , соответствующее группе G , можно вложить в F как орбиту присоединенного действия компактной подгруппы $G_{\mathbb{R}}$, выбирая любой элемент $\Lambda \in N \cap F$. Вложение $M \subset F$ не зависит от выбора Λ .

ЛЕММА 2.2. *Отображение $P_w: F \rightarrow F$ коммутирует с присоединенным действием и сохраняет подмногообразие $M \subset F$ для любого $w \in W$.* $\square$

Таким образом, можно определить подрасслоение $p_{\text{comp}}: E_{\text{comp}} \rightarrow B$ расслоения p , разнося подмногообразие M отображениями параллельного переноса по всем слоям. Ограничение связности $\mathcal{D}$ на это подрасслоение дает связность на расслоении p_{comp} с той же группой голономии W . Пусть $p_w: M \rightarrow M$ есть отображение параллельного переноса, соответствующее элементу $w \in W$. С расслоением $p_{\text{comp}}: E_{\text{comp}} \rightarrow B$ связано расслоение $p_1: E_1 \rightarrow B$, слои которого суть касательные расслоения слоев расслоения p_{comp} . Расслоения p и p_1 изоморфны. На расслоении $p_1: E_1 \rightarrow B$ имеется плоская связность, определяемая отображениями параллельного переноса $p_{w*}: T_*M \rightarrow T_*M$, $w \in W$.

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ есть метрика на многообразии флагов M , инвариантная относительно действия группы голономии W , и пусть $\omega = dp \wedge dq$ — лиувиллева форма на T^*M , а ω_0 — симплектическая форма на T_*M , полученная из ω с помощью метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 2.3. *Форма ω_0 инвариантна относительно изоморфизмов $f_*: T_*M \rightarrow T_*M$, индуцированных изометриями $f: M \rightarrow M$.* $\square$

Таким образом, форма ω_0 инвариантна относительно отображений параллельного переноса p_{w*} на расслоении $p_1: E_1 \rightarrow B$ и однозначно разносится по всем слоям этого расслоения. Это дает плоскую симплектическую связность на расслоении $p: E \rightarrow B$, так как расслоения p и p_1 изоморфны.

§3. Отсутствие связности, тождественной на бесконечности, на расслоении $p: E \rightarrow B$

Будем рассматривать многообразие флагов M как регулярную орбиту присоединенного представления соответствующей компактной вещественной формы $G_{\mathbb{R}}$. На алгебре Ли $\mathfrak{g}_R$ существует положительно определенное Ad -инвариантное скалярное произведение $\langle X, Y \rangle = \text{Tr}(X \cdot Y^*)$, где $Y^* = \bar{Y}^T$ в случаях A_n и C_n и $Y^* = Y^T$ в случаях B_n и D_n . Пусть $G_X \subset G_{\mathbb{R}}$ — стабилизатор некоторого элемента X из орбиты M и $\mathfrak{g}_X$ — его касательная алгебра. Можно считать, что $X \in N$. Имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1 [3, § 1]. *Алгебра Ад-инвариантных дифференциальных форм на M есть внешняя алгебра кососимметрических форм $\Lambda_{\text{inv}}^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}/\mathfrak{g}_X)$, обращающихся в нуль на $\mathfrak{g}_X$ и инвариантных относительно присоединенного действия стабилизатора G_X .* $\square$

ЛЕММА 3.2. $\Lambda_{\text{inv}}^1(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}/\mathfrak{g}_X) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha = \langle D, \cdot \rangle$ — некоторая форма из $\Lambda_{\text{inv}}^1(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}/\mathfrak{g}_X)$, то $\alpha(\text{Ad}_A \xi) = \langle D, \text{Ad}_A \xi \rangle = \langle \text{Ad}_{A^{-1}} D, \xi \rangle = \alpha(\xi) = \langle D, \xi \rangle$ для любого $\xi \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ и любого $A \in G_X$, т. е. $D \in \mathfrak{g}_X$. С другой стороны $\alpha(D) = \langle D, D \rangle = 0$, т. е. $D = 0$. Следовательно, $\Lambda_{\text{inv}}^1(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}/\mathfrak{g}_X) = 0$. $\square$

Пусть V — пространство кососимметрических 2-форм на алгебре Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, имеющих вид $\omega_D(\xi, \eta) = \langle D, [\xi, \eta] \rangle$, $D \in \mathfrak{g}_X$, $V \subset \Lambda_{\text{inv}}^2(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}/\mathfrak{g}_X)$. По предложению 3.1 формы ω_D определяют Ад-инвариантные формы на M . Эти формы замкнуты и не когомологичны нулю; следовательно, V отождествляется с подпространством в $H^2(M; \mathbb{R})$.

Группа Вейля W действует на пространстве M отображениями параллельного переноса $p_w: M \rightarrow M$. По лемме 2.2 отображения p_w коммутируют с присоединенным действием; следовательно, его дифференциал в точке $Y \in M$ имеет вид

$$p_w^*[\xi, Y] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p_w(\text{Ad}_{A(t)} Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{A(t)}(p_w(Y)) = [\xi, p_w(Y)],$$

где $\xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{A(t)} Y$.

ЛЕММА 3.3. *Группа Вейля W действует на пространстве V по формуле $p_w^* \omega_D(\nu, \mu) = \langle \text{Ad}_U D, [\xi, \eta] \rangle$, где $\omega_D(\nu, \mu) = \langle D, [\xi, \eta] \rangle$, $\nu = [\xi, X]$, $\mu = [\eta, X]$, $\nu, \mu \in T_X M$, а U — такая матрица из $G_{\mathbb{R}}$, что $\text{Ad}_U X = p_w(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу Ад-инвариантности формы ω_D имеем

$$\begin{aligned} (p_w^* \omega_D)(X)(\nu, \mu) &= \omega_D(p_w(X))([\xi, p_w(X)], [\eta, p_w(X)]) \\ &= \omega_D(\text{Ad}_U X)([\xi, p_w(X)], [\eta, p_w(X)]) \\ &= \text{Ad}_U^*(\omega_D(X))(\text{Ad}_U^{-1}[\xi, p_w(X)], \text{Ad}_U^{-1}[\eta, p_w(X)]) \\ &= \omega_D(X)([\text{Ad}_U^{-1} \xi, X], [\text{Ad}_U^{-1} \eta, X]) = \langle D, [\text{Ad}_U^{-1} \xi, \text{Ad}_U^{-1} \eta] \rangle \\ &= \langle D, \text{Ad}_U^{-1}[\xi, \eta] \rangle = \langle \text{Ad}_U D, [\xi, \eta] \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Представление $W \rightarrow \text{Aut}(V)$ изоморфно представлению группы Вейля W , порожденному отражениями в следующих зеркалах:*

- 1) *Случай A_n . $V = \{x_1 + \dots + x_{n+1} = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Система зеркал: $\{x_i = x_j, i < j\}$.*
- 2) *Случаи B_n и C_n . $V = \mathbb{R}^n$. Система зеркал: $\{x_i = x_j, i < j\}$ и $\{x_i = 0, i = 1, \dots, n\}$.*
- 3) *Случай D_n . $V = \mathbb{R}^n$. Система зеркал: $\{x_i = x_j, i < j\}$ и $\{x_i = -x_j, i < j\}$.* $\square$

Теперь покажем, что во всех случаях, кроме $A_1 \cong B_1 \cong C_1$ и D_1 , на расслоении $p: E \rightarrow B$ не существует связности, тождественной на бесконечности, или, иными словами, что бесконечно удаленное расслоение $p_{\infty}: E_{\infty} \rightarrow B$ нетривиально. (В случае D_1 расслоение $p: E \rightarrow B$ тривиально, так как p — диффеоморфизм.)

Построенная выше связность на расслоении $p: E \rightarrow B$ продолжается на бесконечность. Обозначим через $S_*p_w: S_*M \rightarrow S_*M$ отображение параллельного переноса в этой связности, соответствующее элементу $w \in W$. Рассмотрим представление $\beta: \pi_1(B) \rightarrow W \rightarrow \text{Aut}(V)$ фундаментальной группы базы в группу автоморфизмов пространства V .

ТЕОРЕМА 3.5. *Расслоение $p_\infty: E_\infty \rightarrow B$ нетривиально во всех случаях, кроме $A_1 \cong B_1 \cong C_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что построенное представление $\beta: \pi_1(B) \rightarrow \text{Aut}(V)$ нетривиально, т. е. что его образ отличен от тождественного преобразования.

Пусть $d = \dim_{\mathbb{R}} M$, и пусть $\pi: S_*M \rightarrow M$ есть расслоение со слоем $S^{d-1} \subset T_f M$. Для каждой петли в базе B соответствующее ей отображение параллельного переноса $p_w: M \rightarrow M$ может либо сохранять ориентацию на M , либо менять ее на противоположную. Пусть $u \in H^{d-1}(S_*M; \mathbb{R})$ — некоторая ориентация на ориентируемом расслоении $\pi: S_*M \rightarrow M$ (рассматриваются когомологии де Рама). Тогда $(S_*p_w)^*u = \pm u = u'$. Рассмотрим точные последовательности Гизина для этих двух ориентаций

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^i(M) &\xrightarrow{\wedge e} H^{i+d}(M) \xrightarrow{\pi^*} H^{i+d}(S_*M) \xrightarrow{p} H^{i+1}(M) \rightarrow \dots, \\ \dots \rightarrow H^i(M) &\xrightarrow{\wedge e'} H^{i+d}(M) \xrightarrow{\pi^*} H^{i+d}(S_*M) \xrightarrow{p'} H^{i+1}(M) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

где e и $e' = \pm e$ суть классы Эйлера, соответствующие ориентациям u и u' , а p и $p' = \pm p$ — гомоморфизмы интегрирования вдоль слоев. В силу функториальных свойств последовательности Гизина имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\wedge e'} & H^{i+d}(M) & \xrightarrow{\pi^*} & H^{i+d}(S_*M) & \xrightarrow{p'} & H^{i+1}(M) \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow p_w^* & & \uparrow (S_*p_w)^* & & \uparrow p_w^* \\ \dots & \xrightarrow{\wedge e} & H^{i+d}(M) & \xrightarrow{\pi^*} & H^{i+d}(S_*M) & \xrightarrow{p} & H^{i+1}(M) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Так как $H^{i+d}(M) = 0$ при $i > 0$, получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{d+1}(S_*M) & \xrightarrow{\pm p} & H^2(M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow (S_*p_w)^* & & \uparrow p_w^* & & \\ 0 & \longrightarrow & H^{d+1}(S_*M) & \xrightarrow{p} & H^2(M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

где вертикальные стрелки — изоморфизмы, а горизонтальные строки точные. Следовательно, представление

$$\pi_1(B) \rightarrow \text{Aut}(H^*(S_*M; \mathbb{R}))$$

нетривиально в случаях, отличных от $A_1 \cong B_1 \cong C_1$, так как представление $\pi_1(B) \rightarrow \text{Aut}(V) \subset \text{Aut}(H^2(M; \mathbb{R}))$ нетривиально. $\square$

Таким образом, во всех случаях $A_n, B_n, C_n, D_n, n > 1$, на расслоении $p: E \rightarrow B$ регулярных орбит присоединенного представления не существует

связности, тождественной на бесконечности. В случае $A_1 \cong B_1 \cong C_1$ такая связность существует. В [1] приведен пример плоской симплектической связности, тождественной на бесконечности. Этот пример можно обобщить на случай милноровского расслоения функции $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + \dots + z_n^2$, имеющей особенность типа A_1 . В этом случае имеем расслоение $p: E \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ со слоем $F_z = p^{-1}(z)$. Поскольку база этого расслоения стягивается на окружность $S^1 = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$, достаточно построить связность на ограничении расслоения на единичную окружность $p: E_1 \rightarrow S^1$. Слой F_z вещественно диффеоморфен кокасательному расслоению T^*S^{n-1} .

Вначале построим связность как семейство диффеоморфизмов $f_t: F_1 \rightarrow F_z$, $z = e^{it}$, заданных по формуле

$$f_t(z_1, \dots, z_n) = e^{it/2}(z_1, \dots, z_n).$$

После выбора некоторого диффеоморфизма $h: F_1 \rightarrow T^*S^{n-1}$ отображение $f_{2\pi}: F_1 \rightarrow F_1$ переходит в антиподальное $i^*: T^*S^{n-1} \rightarrow T^*S^{n-1}$. Пусть (x, y) — координаты Дарбу на слое $F_1 = T^*S^{n-1}$ и $\omega = dx \wedge dy$ — лиувиллева форма. Поскольку i^* — симплектоморфизм, эта форма однозначно разносится по всем слоям расслоения, превращая построенную связность в симплектическую. Однако эта связность не тождественна на бесконечности.

Для построения тождественной на бесконечности связности рассмотрим гамильтоново векторное поле $\mathbf{v}$ на слое F_1 с гамильтонианом

$$H(x, y) = \frac{2}{\pi} \|x\| \arctg \|x\|.$$

Пусть $\{g_t\}$ — соответствующий гамильтонов поток. Отображение g_π тождественно на нулевом сечении, и для продолжений антиподального изоморфизма i^* и отображения g_π на бесконечность S^*S^{n-1} имеет место тождество $g_\pi = i^*$ на S^*S^{n-1} . Следовательно, отображение $i^* \circ g_\pi$ сохраняет симплектическую форму ω на F_1 , тождественно на бесконечности и антиподально на нулевом сечении, т.е. является многомерным симплектическим обобщением скручивания Дена на двумерном цилиндре [4, введение].

Теперь определим связность на расслоении $p: E_1 \rightarrow S^1$ семейством диффеоморфизмов $f_{2t} \circ g_t: F_1 \rightarrow F_z$, $z = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда отображение параллельного переноса, соответствующее полному обходу по окружности, совпадает с $i^* \circ g_\pi$. Это дает плоскую симплектическую тождественную на бесконечности связность на милноровском расслоении функции $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + \dots + z_n^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arnold V. Symplectic monodromy of Milnor fibrations. A Floer memorial volume (E. Zehnder ed.), Vol. 3, Birkhauser (1992).
2. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Мир, М. (1972).
3. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы теории гомологий. Наука, М. (1984).
4. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. II. Наука, М. (1984).