Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Бахтин, Усреднение вдоль цепи Маркова,
Функц. анализ и его прил., 1996, том 30, вы-
пуск 1, 54–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa504>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:04:24

Усреднение вдоль цепи Маркова

© 1996. В. И. БАХТИН

Рассмотрим стохастический каскад с быстрыми и медленными движениями, определяемый системой

$$\begin{cases} x_{i+1} = X_\varepsilon(x_i, y_i), & X_\varepsilon(x, y) = x + \varepsilon v(x, y), \\ \mathbf{P}(y_{i+1} \in M \mid x_i, y_i) = p(x_i, y_i, M). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь буква x (с индексом или без него) обозначает точку из $\mathbb{R}^r$, а y — точку из измеримого пространства $(Y, \mathfrak{A})$, ε — малый положительный параметр, $v(x, y)$ — гладкое векторное поле на $\mathbb{R}^r$, измеримо зависящее от параметра y , и $p(x, y, M)$ — переходная вероятность на $(Y, \mathfrak{A})$ по отношению к аргументам $y \in Y$, $M \in \mathfrak{A}$, гладко зависящая от параметра x . При $\varepsilon = 0$, очевидно, каскад вырождается в семейство цепей Маркова, зависящее от параметра x .

В теории усреднения изучается отклонение медленной компоненты траектории каскада $\{x_i\}$ от траектории некоторого усредненного каскада на x -пространстве в течение времени порядка ε^{-1} . Например, в [1] и [2] для систем, аналогичных (1) (но только с непрерывным временем), установлено, что распределение медленной компоненты удовлетворяет центральной предельной теореме, а также доказаны грубые (с точностью до логарифмической эквивалентности) оценки вероятностей больших отклонений.

В данной же заметке даются точные асимптотики вероятностей больших отклонений (крамеровского типа), в том числе уточняется скорость сходимости в центральной предельной теореме.

Определим оператор A формулой

$$(Af)(x, y) = \int_Y f(x, y') p(x, y, dy').$$

Можно считать, что он действует в пространстве ограниченных $\mathfrak{B} \times \mathfrak{A}$ -измеримых функций (где $\mathfrak{B}$ — борелевская σ -алгебра на $\mathbb{R}^r$).

Назовем переходную вероятность равномерно эргодической, если при некотором положительном $\Lambda < 1$ для любой ограниченной измеримой функции $f(x, y)$ при всех x

$$\sup_y (Af)(x, y) - \inf_y (Af)(x, y) \leq \Lambda \left(\sup_y f(x, y) - \inf_y f(x, y) \right).$$

В этом случае существует предельный оператор

$$\bar{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n$$

(предел берется в равномерной операторной норме). Очевидно, что функция $\bar{A}f$ не зависит от y , а только от x . Она является средним значением f по отношению к единственной стационарной мере марковской цепи $(Y, \mathfrak{A}, p(x, y, M))$.

Усредненным каскадом назовем каскад

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{X}_\varepsilon(\bar{x}_i), \quad \text{где } \bar{X}_\varepsilon(x) = x + \varepsilon \bar{v}(x), \quad \bar{v}(x) = \bar{A}v(x, y) \quad (2)$$

(здесь v — векторное поле из системы (1)).

Определим функциональное пространство B^n как множество (комплексно-значных) функций $f(x, y)$, которые n раз непрерывно дифференцируемы по x , причем все их частные производные измеримы и равномерно ограничены по совокупности переменных. Равномерную C^n -норму на этом пространстве будем обозначать $\|\cdot\|_n$. Ниже всюду будем предполагать, что каждая компонента векторного поля v принадлежит B^n ($n \geq 1$), а переходная вероятность $p(x, y, M)$ равномерно эргодична, при каждом фиксированном $M \in \mathfrak{A}$ является элементом пространства B^n и каждая ее частная производная по x по отношению к аргументу M является счетно-аддитивным зарядом с равномерно (по x, y) ограниченной полной вариацией.

Для любой ограниченной последовательности функций $f_k \in B^n$ введем обозначение $\Delta = \sup \|f_k\|_n$ и определим случайные величины

$$S_k = f_k(x_0, y_0) + f_{k-1}(x_1, y_1) + \cdots + f_1(x_{k-1}, y_{k-1}).$$

Например, если $f_i = v$, то $S_k = \varepsilon^{-1}(x_k - x_0)$. Если же положить $x_0 = \bar{x}_0$ и

$$f_i(x, y) = \varepsilon^{-1}((\bar{X}_\varepsilon)^{i-1} \circ X_\varepsilon(x, y) - (\bar{X}_\varepsilon)^i(x)),$$

то, как нетрудно видеть, $S_k = \varepsilon^{-1}(x_k - \bar{x}_k)$.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют настолько большое C и малое положительное R , что для любой ограниченной последовательности $f_k \in B^n$ найдутся функции $G_k(x, y, \lambda) = G_k(\lambda) \in B^0$, аналитически зависящие от комплексного параметра λ в круге $|\lambda| < R/\Delta$, а также функции*

$$F_k(\lambda) = F_k(x, y, \lambda) = \lambda F_{k1}(x, y) + \cdots + \lambda^n F_{kn}(x, y), \quad F_{ki} \in B^{n+1-i},$$

такие, что при всех $k \leq \varepsilon^{-1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left\{ \exp \left[\lambda S_k + \lambda^{n+1} \sum_{j=1}^k G_j(x_{k-j}, y_{k-j}, \lambda) \right] \middle| x_0, y_0 \right\} &= \exp F_k(x_0, y_0, \lambda), \\ \|F_{ki}\|_{n+1-i} &\leq Ck\Delta^i, \quad \|G_j(\lambda)\|_0 \leq C\Delta^{n+1} \quad (|\lambda| < R/\Delta). \end{aligned} \quad (3)$$

Величины $F_{ki} \cdot i!$ являются семиинвариантами случайной величины S_k . При этом F_{k1} — это математическое ожидание, а $2F_{k2}$ — дисперсия S_k . В случае вещественнозначных функций f_k все семиинварианты тоже вещественны. Далее, пусть

$$\Gamma_k(\lambda) = F_k(\lambda) - \lambda F_{k1}, \quad \Psi_k(\chi) = \mathbf{P}(S_k - \mathbf{M}S_k < \chi), \quad \Phi(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\chi} e^{-t^2/2} dt.$$

ТЕОРЕМА 2 (крамеровская асимптотика). Если в условиях теоремы 1 функции f_k вещественны, $\chi = \Gamma'_k(\lambda)$, $\lambda \in (0, R/2)$, то

$$1 - \Psi_k(\chi) = \left(1 - \Phi\left(\frac{\chi}{\sqrt{2F_{k2}}}\right)\right) \exp\left(\Gamma_k(\lambda) - \lambda\Gamma'_k(\lambda) + \frac{(\Gamma'_k(\lambda))^2}{4F_{k2}}\right) \times \left(1 + O(k\lambda^{m+1}) + O\left(\frac{k\lambda}{F_{k2}}\right) + O(k\sqrt{F_{k2}}\lambda^{m+2}) + O(kF_{k2}^{-3/2})\right).$$

Здесь $|O(\xi)| \leq \Theta|\xi|$ при всех $|\xi| < \theta$, а положительные числа Θ и θ зависят только от констант C , Δ и R из оценок (3).

Все F_{ki} являются конструктивно вычисляемыми функциями от начального условия (x_0, y_0) . В первом приближении значения F_{k1} и F_{k2} могут быть найдены следующим образом. Пусть $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ — траектория усредненного каскада,

$$\begin{aligned} \bar{f}_k &= \bar{A}f_k, \quad \tilde{f}_k = f_k - \bar{f}_k, \quad \bar{F}_k(\bar{x}_0) = \bar{f}_k(\bar{x}_0) + \bar{f}_{k-1}(\bar{x}_1) + \dots + \bar{f}_1(\bar{x}_{k-1}), \\ \tilde{v} &= v - \bar{v}, \quad \tilde{V} = \tilde{v} + A\tilde{v} + A^2\tilde{v} + \dots, \\ \tilde{F}_k &= \tilde{f}_k + A\tilde{f}_{k-1} + \dots + A^{k-1}\tilde{f}_1 + \varepsilon \frac{d\bar{F}_k}{dx} \tilde{V}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. В условиях теоремы 1 при $n \geq 3$

$$\|F_{k1} - \bar{F}_k\|_{n-2} \leq C\Delta, \quad k \leq \varepsilon^{-1}.$$

Если же $n \geq 4$, то при всех $k \leq \varepsilon^{-1}$

$$\begin{aligned} 2F_{k2}(x_0, y_0) &= \sum_{j=1}^{k-1} \bar{A} \left[\left(\tilde{f}_j + \varepsilon \frac{d\bar{F}_j}{dx} \tilde{v} \right)^2 + 2 \left(\tilde{f}_j + \varepsilon \frac{d\bar{F}_j}{dx} \tilde{v} \right) A\tilde{F}_{j-1} \right] (\bar{x}_{k-1-j}) \\ &+ \gamma_k(x_0, y_0), \quad \|\gamma_k\|_{n-3} \leq C\Delta^2. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. Наука, М. (1979). 2. Вентцель А. Д. Предельные теоремы о больших отклонениях для марковских случайных процессов. Наука, М. (1986).

Белгосуниверситет,
физический факультет

Поступило в редакцию
20 мая 1993 г.
В переработанном виде
28 сентября 1994 г.