Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, В. З. Энольский, Явное алгебраическое описание гиперэллиптических якобианов на основе σ -функций Клейна, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 1, 57–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa505>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:45:48

УДК 513.015.7+517.944

Явное алгебраическое описание гиперэллиптических якобианов на основе σ -функций Клейна

© 1996. В. М. Бухштабер, В. Э. Энольский¹

Задача алгебраического построения якобиана гиперэллиптической кривой рода g хорошо известна. Необходимый для ее решения аппарат был развит уже в основополагающей работе Клейна [1] (подробности можно найти в [2]). Однако, насколько известно авторам, явные формулы не были тогда получены, и развитый аппарат впоследствии не использовался.

Под влиянием современных достижений в теории вполне интегрируемых динамических систем Мамфорд вновь рассмотрел этот вопрос. Предложенное им решение [3] основано на рекуррентной процедуре Маккина и ван Мёрбеке [4]. Следует отметить, что из результатов пионерских работ Новикова, Дубровина, Итса и Матвеева (см. обзор [5]), выполненных ранее [4], следует, что гиперэллиптические якобианы реализуются как линии уровня полиномиальных интегралов стационарных высших уравнений КдВ.

В этой заметке, опираясь на классическую теорию гиперэллиптических σ -функций Клейна [1], мы даем явное алгебраическое описание якобиана гиперэллиптической кривой рода g и соответствующего многообразия Куммера.

Это исследование инициировано недавней работой авторов [6], где на основе σ -функций Клейна были построены явные решения важных уравнений в частных производных; дальнейшему развитию этих результатов посвящена работа [7].

Пусть

$$V = \left\{ (y, x) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = 4x^{2g+1} + \sum_{i=0}^{2g} \lambda_{2g-i} x^{2g-i} \right\} \quad (1)$$

— гиперэллиптическая кривая рода g , снабженная каноническим базисом циклов $(A_1, \dots, A_g; B_1, \dots, B_g)$, т.е. базисом в группе одномерных гомологий $H_1(V, \mathbb{Z})$ с матрицей пересечения $\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_g \\ \mathbb{1}_g & 0 \end{pmatrix}$, где $\mathbb{1}_g$ есть единичная $g \times g$ -матрица.

Пусть $\{du_k\}_{k=1}^g$, $du_k = x^{k-1}dx/y$, $k = 1, \dots, g$, — канонические голоморфные дифференциалы в $\mathcal{H}(V, \mathbb{C})$ и $2\omega = (\oint_{A_k} du_l)$, $2\omega' = (\oint_{B_k} du_l)$ — невырожденные $g \times g$ -матрицы их A - и B -периодов. Под действием преобразования $(2\omega)^{-1}$ в $\mathcal{H}(V, \mathbb{C})$ вектор $du^T = (du_1, \dots, du_g)$ отображается в вектор нормированных голоморфных дифференциалов $dv^T = (dv_1, \dots, dv_g)$, т.е. в вектор из $\mathcal{H}(V, \mathbb{C})$, компоненты которого нормированы условиями $\oint_{A_k} v_l = \delta_{kl}$, $k, l = 1, \dots, g$. Известно, что $g \times g$ -матрица $\tau = (\oint_{B_k} v_l) = \omega^{-1}\omega'$ принадлежит

¹Эти исследования были частично финансированы грантами МЗЗ000 и U44000 Международного научного фонда и грантом 94-01-01444 РФФИ.

верхнему полупространству Зигеля $\mathcal{S}_g$ степени g , т.е. является симметрической матрицей с положительно определенной мнимой частью.

Введем, следуя [2], абелевы дифференциалы второго типа

$$dr_j = \sum_{l=j}^{2g-j+1} (l-j+1) \lambda_{l+j+1} \frac{x^l dx}{4y}, \quad j = 1, \dots, g,$$

и обозначим их матрицы A - и B -периодов через $\eta = (-\oint_{A_k} dr_l)$, $\eta' = (-\oint_{B_k} dr_l)$. Оказывается, существует такая симметрическая $g \times g$ -матрица a , что $\eta = 2a\omega$.

Обозначим через T^g тор $\mathbb{C}^g/(\mathbb{I}_g \oplus \tau)$, изоморфный якобиану кривой (1). Пусть $\mathcal{D} = \{x_1, \dots, x_g\} - \{gx_0\}$ — дивизор и $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = u = (u_1, \dots, u_g)$ — его образ в T^g под действием отображения Абеля $\mathcal{A}$, где

$$u_k = \sum_{j=1}^g \int_{x_0}^{x_j} \frac{x^{k-1} dx}{y}, \quad k = 1, \dots, g,$$

$x_0 \in V$ — произвольная точка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гиперэллиптическая σ -функция Клейна определяется по формуле

$$\sigma(u) = Ce^{u^T a u} \theta((2\omega)^{-1}u - K_{x_0} | \tau), \quad (2)$$

где $a = (2\omega)^{-1}\eta$ — симметрическая $g \times g$ -матрица,

$$\theta(v | \tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp \pi i \{m^T \tau m + 2v^T m\}$$

— стандартная θ -функция, K_{x_0} — вектор римановых констант с базисной точкой x_0 и C — некоторая постоянная.

При $g = 1$ функция (2), для которой $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = -g_2$ и $\lambda_0 = -g_3$, есть стандартная σ -функция Вейерштрасса.

ЛЕММА (см., например, [2, 8]). $2g \times 2g$ -матрица $\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ \eta & \eta' \end{pmatrix}$ принадлежит PSp_{2g} , т.е.

$$\mathcal{G} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_g \\ \mathbb{I}_g & 0 \end{pmatrix} \mathcal{G}^T = -\frac{\pi i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_g \\ \mathbb{I}_g & 0 \end{pmatrix}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1 (см., например, [2, 8]). Пусть $x_0 = \infty$ — базисная точка отображения Абеля и $\begin{bmatrix} \varepsilon_1^{(0)} & \dots & \varepsilon_g^{(0)} \\ \varepsilon_1^{(1)} & \dots & \varepsilon_g^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_1^{(l)} & \dots & \varepsilon_g^{(l)} \end{bmatrix}$ — полуцелая характеристика вектора римановых констант. Тогда (2) обладает следующим свойством периодичности:

$$\sigma(u + 2\omega_k^{(l)}) = \exp \{2\eta_k^{(l)T} (u + \omega_k^{(l)}) + 2\pi i \varepsilon_k^{(l+1)}\} \sigma(u),$$

где $l = 0, 1 \pmod{2}$ и $\omega_k^{(l)}$ (соотв. $\eta_k^{(l)}$) есть k -й столбец матрицы ω (соотв. η) при $l = 0$ и $-k$ -й столбец матрицы ω' (соотв. η') при $l = 1$.

Введем следующие мероморфные на T^g функции:

$$\wp_{pq} = -\frac{\partial^2 \ln \sigma(u)}{\partial u_p \partial u_q}, \quad \wp_{pqr} = -\frac{\partial^3 \ln \sigma(u)}{\partial u_p \partial u_q \partial u_r}, \quad \dots, \quad p, q, r = 1, \dots, g.$$

Согласно [1], проблема обращения Якоби разрешается следующим образом:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u \in T^g$. Тогда $\mathcal{A}^{-1}(u) = \{(x_k, y_k) \in V, k = 1, \dots, g\}$, где $\{x_k, k = 1, \dots, g\}$ — множество корней уравнения

$$x^g - \sum_{l=1}^g \wp_{lg}(u) x^{l-1} = 0$$

и y_k вычислены по x_k с помощью формулы

$$y_k = \sum_{l=1}^g \wp_{lgg}(u) x_k^{l-1}.$$

Для $n = g + g(g+1)/2$ введем в пространстве $\mathbb{C}^n$ координаты Q, P , где $P = (P_1, \dots, P_g)$, $Q^T = (q_1, \dots, q_g)$ есть g -мерный вектор и g -мерные векторы $P_k^T = (p_{k1}, \dots, p_{kg})$ являются столбцами симметрической матрицы P . Рассмотрим симметрическую степень $(V)^g$ кривой $V \subset \mathbb{C}^2$ как подмногообразие в симметрической степени $(\mathbb{C}^2)^g$ комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$.

Следуя теореме 1, определим отображение $f: \mathbb{C}^n \rightarrow (\mathbb{C}^2)^g$ по формуле $f(Q, P) = (\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^g)$, где $x_1, \dots, x_g$ являются корнями уравнения $x^g - \sum_{l=1}^g p_{lg} x^{l-1} = 0$ и $y_k = \sum_{l=1}^g q_l x_k^{l-1}$.

Введем алгебраическое многообразие $\mathcal{T}$,

$$\mathcal{T} = \{(Q, P) \in \mathbb{C}^n \mid QQ^T = \Phi(P_1, \dots, P_g)\}, \quad (3)$$

где $\Phi(P_1, \dots, P_g)$ есть $g \times g$ -матрица

$$\Phi(P_1, \dots, P_g) = \Lambda_0 + \lambda_{2g} P_g P_g^T + A + A^T,$$

причем

$$\begin{aligned} A &= B \left(2P_g P_g^T - 2B \sum_{k=1}^g P_k e_k^T + 2 \sum_{k=1}^g e_k P_k^T B^T + \frac{1}{2} \Lambda_1 \right), \\ B &= P_g e_g^T + \sum_{k=1}^{g-1} e_{k+1} e_k^T. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $e_k^T = (\delta_{k1}, \dots, \delta_{kg})$, $\Lambda_0 = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{2g-2})$ и $\Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2g-1})$.

Пусть $\mathbb{C}^{n-g}$ — векторное пространство с координатами $P_1, \dots, P_g$; определим в нем подмногообразие

$$\mathcal{K} = \{(P_1, \dots, P_g) \in \mathbb{C}^{n-g} \mid \text{rank } \Phi(P_1, \dots, P_g) = 1\}. \quad (5)$$

Очевидно, что проекция $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-g}$ индуцирует двулистное разветвленное накрытие $\pi: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{K}$.

ТЕОРЕМА 2. *Ограничение отображения f на $\mathcal{T}$ индуцирует отображение $\mathcal{T} \rightarrow (V)^g$, композиция которого с отображением Абеля $\mathcal{A}: (V)^g \rightarrow T^g$ индуцирует изоморфизм между $\mathcal{T}$ и $T^g - (\theta)$, где (θ) — тэта-дивизор. При этом изоморфизме проекция π согласуется с двулистным накрытием тором его многообразия Куммера (здесь многообразием Куммера мы называем $T^g/\pm$).*

Таким образом, нами получено алгебраическое описание симметрической степени гиперэллиптической кривой V , которое при $g = 1$ совпадает с описанием эллиптической кривой — кубики Вейерштрасса. Обратим внимание на то, что уравнение, задающее $\mathcal{T}$, является кубическим по вектору P_g и квадратичным по векторам $P_1, \dots, P_{g-1}$, т. е. оно представляет собой кубическое уравнение в тензорной алгебре пространства $\mathbb{C}^g$. В случае $g = 2$ уравнение (5) дает описание поверхности Куммера по Бейкеру [8].

Рассмотрим симметрическую матрицу $\wp(u) = (\wp_1(u), \dots, \wp_g(u))$ и вектор $\wp'(u)$,

$$\wp_k(u) = \begin{pmatrix} \wp_{1k}(u) \\ \vdots \\ \wp_{gk}(u) \end{pmatrix}, \quad \wp'(u) = \frac{\partial \wp_g(u)}{\partial u_g} = \begin{pmatrix} \wp_{1gg}(u) \\ \vdots \\ \wp_{ggg}(u) \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, g.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Отображение $T^g - (\theta) \rightarrow \mathcal{T}$, которое переводит u в $(\wp'(u), \wp(u))$, униформизирует алгебраическое многообразие $\mathcal{T}$ и отображение $(u, -u) \rightarrow \wp$ униформизирует многообразие $\mathcal{K}$.*

В случае $g = 1$ следствие 2 описывает классическую униформизацию кривой $\{y^2 = 4x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_0\}$ $\wp$ -функциями Вейерштрасса, а в случае $g = 2$ — униформизацию поверхности Куммера двумерными $\wp$ -функциями Клейна согласно Бейкеру [8].

Авторы благодарны С. П. Новикову и И. М. Кричеверу за стимулирующее обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Klein F. Math. Ann., **32**, 351–380 (1888).
2. Baker H. F. Abels Theorem and the Allied Theory Including the Theory of Theta Functions. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1897).
3. Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. Мир, М. (1988).
4. McKean H. P., van Moerbeke P. Invent. Math., **30**, 217–274 (1975).
5. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. УМН, **31**, вып. 1, 55–136 (1976).
6. Бухштабер В. М., Энольский В. З. УМН, **50**, вып. 1, 191–192 (1995).
7. Бухштабер В. М., Лейкин Д. В., Энольский В. З. УМН, **51**, вып. 1 (1996).
8. Baker H. F. Multiply Periodic Functions. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1907).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет,
кафедра высшей геометрии и топологии
Институт металлофизики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию
6 апреля 1995 г.