Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гомилко, К теории J -самосопряженных возмущений самосопряженных операторов, *Функци. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 1, 61–63

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa506>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 05:28:09

УДК 513.8

К теории J -самосопряженных возмущений самосопряженных операторов

© 1996. А. М. Гомилко

Пусть H — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и единичным оператором I . Введем в рассмотрение пространство Крейна $\mathcal{H} = H \oplus H$ (см. [1]) со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ и индефинитным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle = (J\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$, где оператор J определен формулой $J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$. Пусть A_1, A_2 — вполне непрерывные самосопряженные линейные операторы в пространстве H , а $\mathcal{K}$ — конечномерный J -самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, т.е. $\dim \mathcal{K}\mathcal{H} < \infty$ и $J\mathcal{K} = \mathcal{K}^*J$. Введем в рассмотрение семейство вполне непрерывных J -самосопряженных операторов

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = \mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{K}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \geq 0. \quad (1)$$

При $\varepsilon = 0$ оператор $\mathcal{A} = \mathcal{A}(0)$ является самосопряженным и поэтому имеет чисто вещественный спектр. С другой стороны, если операторы A_1, A_2 из (1) не имеют общих собственных значений, то для любого ненулевого собственного значения λ_0 оператора $\mathcal{A}$ соответствующее собственное подпространство $\mathcal{L}_{\lambda_0}(\mathcal{A})$ является равномерно J -дефинитным:

$$|\langle x, x \rangle| \geq c \|x\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall x \in \mathcal{L}_{\lambda_0}(\mathcal{A}), \quad c > 0. \quad (2)$$

Тогда [2, 3] найдутся такие $\delta > 0, \varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ спектр оператора $\mathcal{A}(\varepsilon)$ в окрестности $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ является вещественным и имеет суммарную алгебраическую кратность, равную размерности пространства $\mathcal{L}_{\lambda_0}(\mathcal{A})$. В связи с этим обстоятельством возникает вопрос: верно ли, что для фиксированной пары операторов $\mathcal{A}, \mathcal{K}$ с указанными выше свойствами найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ оператор $\mathcal{A}(\varepsilon)$ из (1) имеет не более конечного числа невещественных собственных значений? (Отметим, что близкие вопросы возникают в механике сплошной среды.) В данной заметке показано, что в общем случае ответ на поставленный вопрос является отрицательным даже при одномерном возмущении оператора $\mathcal{A}$ и выполнении условия подчинения

$$\|\mathcal{A}^{-1}\mathcal{K}\|_{\mathcal{H}} < \infty. \quad (3)$$

Для построения соответствующего примера введем необходимые определения. Пусть A — положительный вполне непрерывный оператор в H с простым спектром и $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональный базис в H , составленный из собственных векторов оператора A . Пусть $f \in H$ — произвольный фиксированный вектор, удовлетворяющий условию

$$(f, e_k) \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Введем в рассмотрение в пространстве H самосопряженные операторы T , A_1 , A_2 :

$$Tx_1 = (x_1, f)f, \quad x_1 \in H, \quad A_1 = (I+T)^{-1/2}A(I+T)^{-1/2}, \quad A_2 = A. \quad (5)$$

Определим одномерный J -самосопряженный в $\mathcal{H}$ оператор формулой

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} T(I+T)^{-1} & -T(I+T)^{-1/2} \\ T(I+T)^{-1/2} & -T \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Простота спектра положительного оператора A и условие (4) на вектор f обеспечивают справедливость следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Операторы A_1 и A_2 из (5) не имеют общих собственных значений.*

Таким образом, для любого собственного подпространства $\mathcal{L}_{\lambda_0}(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$, определенного согласно формулам (1) и (5), выполнено условие дефинитности (2).

ТЕОРЕМА. *При любом $\varepsilon > 0$ оператор $\mathcal{A}(\varepsilon)$, определенный формулами (1), (5), (6), не имеет собственных значений на интервале $\lambda \in (0, 4\varepsilon)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано и λ — собственное значение оператора $\mathcal{A}(\varepsilon)$. Тогда, согласно определению оператора $\mathcal{A}(\varepsilon)$, найдутся такие векторы $y_j \in H$, $j = 1, 2$, не равные нулю одновременно, для которых справедливы равенства

$$(A - \lambda T - \lambda I)y_1 = -\varepsilon T(y_1 - y_2), \quad (A - \lambda I)y_2 = -\varepsilon T(y_1 - y_2). \quad (7)$$

При этом в случае вещественности собственного значения λ из (7) нетрудно получить равенство

$$(2\varepsilon - \lambda) \operatorname{Re}[(y_1, f)(f, y_2)] = \varepsilon(|(y_1, f)|^2 + |(y_2, f)|^2). \quad (8)$$

С другой стороны, в силу условий (4) и (7) заключаем, что

$$|(y_1, f)| + |(y_2, f)| \neq 0,$$

а тогда из (8) получаем, что λ не может принадлежать интервалу $(0, 4\varepsilon)$. Теорема доказана.

Используя теорему М. В. Келдыша [4, с. 314] о полноте системы корневых векторов и спектре слабо возмущенного самосопряженного оператора, из доказанной теоремы имеем следующее утверждение, дающее отрицательный ответ на поставленный вопрос о количестве не вещественных собственных значений оператора $\mathcal{A}(\varepsilon)$.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть вполне непрерывный положительный оператор A имеет простой спектр и конечный порядок, а вектор f , удовлетворяющий условию (4), имеет вид $f = Ag$, $g \in H$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ оператор $\mathcal{A}(\varepsilon)$, определенный согласно (1), (5), (6), имеет бесконечное число не вещественных собственных значений.*

Отметим, что если для собственных пространств невозмущенного оператора $\mathcal{A}$ не требовать выполнения условия дефинитности (2), то возможна такая ситуация, когда для любого $\varepsilon > 0$ все собственные значения возмущения $\mathcal{A}(\varepsilon)$ будут

невещественными. Приведем соответствующий пример. Оператор

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -T \\ T & 0 \end{pmatrix}$$

унитарно эквивалентен оператору

$$V\mathcal{A}(\varepsilon)V^{-1} = \begin{pmatrix} A + i\varepsilon T & 0 \\ 0 & A - i\varepsilon T \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & iI \\ iI & I \end{pmatrix}.$$

При этом, если T определен согласно (5) и выполнено условие (4), то все собственные значения операторов $A \pm i\varepsilon T$ для любого значения $\varepsilon > 0$ являются невещественными, а значит, таким же свойством обладают и операторы $\mathcal{A}(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Автор благодарит Н. Д. Копачевского за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Наука, М. (1986). **2.** Дергузов В. И. Матем. сб., **63**, вып. 4, 591–619 (1964). **3.** Крейн М. Г. Введение в геометрию индефинитных J -пространств и теорию операторов в этих пространствах. Вторая летняя матем. школа, Т. 1, Наукова думка, Киев (1965), с. 15–92. **4.** Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Наука, М. (1965).

Институт гидромеханики
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию
15 июля 1994 г.

УДК 517.946

Асимптотика усредненного лагранжиана для модели медленной диффузии с нелинейным вырождением

© 1996. С. М. Козлов

В работе исследуется асимптотическое поведение усредненного лагранжиана при малом градиенте концентрации для следующей модели нелинейной вырожденной диффузии. Предположим, что имеется локальная энергия вида

$$l_0(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(|\xi_1| - 1)_+^2 + \frac{1}{2}|\xi_2|^2, \quad (1)$$

где $(r)_+ = \max\{r, 0\}$. С тем чтобы ввести зависимость от пространственной переменной, зададимся векторным полем $v(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, таким, что $v(x) \neq 0$ почти везде. Определим векторное поле единичных векторов $\alpha(x) = v(x)/|v(x)|$ и обозначим через T_α матрицу поворота на угол α :

$$T_\alpha \xi = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда по этим данным построим пространственно неоднородный лагранжиан по следующей формуле:

$$L(x, \xi) = l_0(T_{\alpha(x)}\xi). \quad (2)$$