Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Козлов, Асимптотика усредненного лагранжиана для модели медленной диффузии с нелинейным вырождением, *Функци. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 1, 63–67

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa507>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:35:32

невещественными. Приведем соответствующий пример. Оператор

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -T \\ T & 0 \end{pmatrix}$$

унитарно эквивалентен оператору

$$V\mathcal{A}(\varepsilon)V^{-1} = \begin{pmatrix} A + i\varepsilon T & 0 \\ 0 & A - i\varepsilon T \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & iI \\ iI & I \end{pmatrix}.$$

При этом, если T определен согласно (5) и выполнено условие (4), то все собственные значения операторов $A \pm i\varepsilon T$ для любого значения $\varepsilon > 0$ являются невещественными, а значит, таким же свойством обладают и операторы $\mathcal{A}(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Автор благодарит Н. Д. Копачевского за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Наука, М. (1986). **2.** Дергузов В. И. Матем. сб., **63**, вып. 4, 591–619 (1964). **3.** Крейн М. Г. Введение в геометрию индефинитных J -пространств и теорию операторов в этих пространствах. Вторая летняя матем. школа, Т. 1, Наукова думка, Киев (1965), с. 15–92. **4.** Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Наука, М. (1965).

Институт гидромеханики
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию
15 июля 1994 г.

УДК 517.946

Асимптотика усредненного лагранжиана для модели медленной диффузии с нелинейным вырождением

© 1996. С. М. Козлов

В работе исследуется асимптотическое поведение усредненного лагранжиана при малом градиенте концентрации для следующей модели нелинейной вырожденной диффузии. Предположим, что имеется локальная энергия вида

$$l_0(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(|\xi_1| - 1)_+^2 + \frac{1}{2}|\xi_2|^2, \quad (1)$$

где $(r)_+ = \max\{r, 0\}$. С тем чтобы ввести зависимость от пространственной переменной, зададимся векторным полем $v(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, таким, что $v(x) \neq 0$ почти везде. Определим векторное поле единичных векторов $\alpha(x) = v(x)/|v(x)|$ и обозначим через T_α матрицу поворота на угол α :

$$T_\alpha \xi = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда по этим данным построим пространственно неоднородный лагранжиан по следующей формуле:

$$L(x, \xi) = l_0(T_{\alpha(x)}\xi). \quad (2)$$

Рис. 1

Рис. 2

Фиксируем область $D \subset \mathbb{R}^2$ и рассмотрим вариационную задачу вида

$$\inf_u \left\{ \int_D [L(x, \nabla u(x)) - g(x)u(x)] dx \right\}, \quad (3)$$

где $g \in L^2(D)$, а минимум разыскивается по всем функциям $u \in H_0^1(D)$. Как следует из определений (1), (2), эта проблема выпуклая и, значит, имеет хотя бы одно решение. Нас интересует задача усреднения, и мы предположим, что $v(x)$ периодически зависит от $x \in \mathbb{R}^2$ с решеткой периодов $\mathbb{Z}^2$. Предположим дополнительно, что интегральные кривые векторного поля имеют вид, изображенный на рис. 1, и, таким образом, векторное поле имеет по четыре фокуса на периоде, из которых два устойчивые, а два неустойчивые, причем расположены они крест-накрест, и четыре седловые особые точки. Следует подчеркнуть, что в рассматриваемой задаче ориентация интегральных кривых не играет роли, поскольку, согласно (2), они задают направление невырожденной диффузии, для которой направление обратимо. Мы собираемся исследовать усреднение этого процесса диффузии в предположении малости градиента концентрации. Попробуем понять сначала на научно-популярном уровне, как может протекать этот процесс. Коль скоро градиент мал, первое слагаемое в (1) отсутствует, и мы наблюдаем диффузию вдоль интегральной кривой, которая рано или поздно подходит очень близко к особой точке — фокусу. Поскольку в одну и ту же особую точку приходят интегральные кривые из разных периодов, требование малости градиента не может соблюдаться в непосредственной близости от фокуса; поэтому в какой-то момент включается первое слагаемое в (1) и происходит переход, а точнее появляется возможность перехода с одной интегральной кривой на другую. Из этого рассуждения становится понятно, что эффективный перенос вещества и его интенсивность, т.е. эффективная диффузия, определяются именно механизмом распределения по направлениям в особой точке. Приступим теперь к формульной записи приведенных рассуждений. Напомним, что, согласно принципу усреднения, в достаточно большой по сравнению с ячейкой периодичности области лагранжиан (2) можно заменить усредненным, который вычисляется по стандартной в теории усреднения (см. [1]) формуле

$$\widehat{L}(\xi) = \inf_u \int_K L(x, \xi + \nabla u) dx, \quad (4)$$

где $K = (0, 1]^2$ — единичный квадрат периодичности и минимум разыскивается по всем периодическим функциям $u \in H^1(K)$. Нас интересует асимптотика $\hat{L}(\xi)$ при $|\xi| \rightarrow 0$. Для некоторого упрощения вычислений зададимся кусочно-постоянным полем направлений (см. рис. 2). Как видно, это векторное поле имеет два возможных направления:

одно составляет угол θ , $0 < \theta < \pi/2$, с горизонталью в долях квадрата $(1/2, 1] \times (0, 1/2]$ и $(0, 1/2] \times (1/2, 1]$;

другое составляет угол θ с вертикалью в оставшихся двух долях.

Характер поведения интегральных кривых такого векторного поля такой же, как и в гладком случае (рис. 1), и можно показать, что основная оценка работы применима в гладком случае. Однако, учитывая простоту выкладок и имея в виду демонстративность модели, дальнейшее изложение проведем для кусочно-постоянного поля направлений.

ТЕОРЕМА. *Существует $\delta > 0$ и постоянные $C_-, C_+ > 0$, такие, что выполняется двусторонняя оценка*

$$-C_- \frac{|\xi|^2}{\log |\xi|} \leq \hat{L}(\xi) \leq -C_+ \frac{|\xi|^2}{\log |\xi|} \quad \text{при } 0 < |\xi| < \delta. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставив тестовую функцию в (4), мы получим оценку сверху, а используя двойственное представление для $\hat{L}(\xi)$, подобным же образом получим оценку снизу.

Рис. 3

Рис. 4. Стыковка спиралек

Оценка сверху. Зададимся некоторым $\xi = (0, \alpha)$ и возьмем две спирали, как указано на рис. 3; одна из них начинается справа, другая — слева. Согласно рисунку, возьмем тестовую функцию в менее интенсивно окрашенном регионе равной нулю, а в более интенсивно окрашенном равной α . Чтобы из этой кусочно-постоянной функции изготовить функцию класса H^1 , подправим ее в окрестности спиралек с тем, чтобы обеспечить переход от нуля до значения α . С этой целью каждую спиральку возьмем в виде полоски начальной

ширины w_0 и доопределим тестовую функцию линейным по направлению нормали к спиральке образом. Кроме того, чтобы замкнуть построение, угол левой спиральки возьмем слегка отличным от θ , т. е. равным $\theta' = \theta + \delta\theta$. Пусть N — количество переломов спиральки до слияния левой и правой спиралек. Очевидно, $\delta\theta \sim C/N$, а для ширины w_n и длины l_n звена спиральки после n -го перелома имеем $w_n = w_0 \operatorname{tg}^n \theta'$, $l_n = l_0 \operatorname{tg}^n \theta'$. Чтобы доопределить тестовую функцию, осталось лишь рассмотреть вопрос о согласованности ее значений в месте слияния спиралек. Как видно из рис. 4, это можно сделать кусочно-линейным (сплайновым) способом, что, разумеется, представляет собой непрерывную стыковку линейных функций, определенных ранее в каждой из спиралек. Для оптимизации энергии с помощью этой тестовой функции мы имеем один свободный параметр $\delta\theta$ — отклонение спиральки от стандарта или, что эквивалентно, число переломов N . Вместо этой оптимизации сделаем правдоподобное предположение, которое затем будет оправдано дальнейшим ходом рассуждений. А именно, представляется естественным для обеспечения более плавного перехода и соответственно меньшего выделения энергии взять эти спиральки как можно длиннее, т. е. с максимальным возможным N . Лимитирующим обстоятельством при этом является первое слагаемое в локальной энергии: напомним, что первое направление перпендикулярно неискаженной спирали. Отсюда следует, что энергия тестовой функции вдоль правой неискаженной спиральки будет равна нулю, если только мы обеспечим требование $\alpha/w_N \leq 1$, откуда экстремально $\alpha = w_0 \operatorname{tg}^N \theta$, $N = -C \log \alpha$. Тогда в отклоненной спирали вклад от второго члена в локальной энергии после суммирования дает оценку

$$E(\varphi) \equiv \iint_K L(x, \nabla \varphi) dx \leq \alpha^2 \sum_{n=1}^N \left(\frac{\sin \delta\theta}{w_n} \right)^2 l_n w_n = C \alpha^2 N \sin^2 \delta\theta \leq -C + \frac{\alpha^2}{\log \alpha}.$$

Точно так же выводится верхняя оценка с $\xi = (\alpha, 0)$, а тогда для произвольного $\xi = (\alpha_1, \alpha_2)$ она следует из выпуклости L .

Оценка снизу. Перейдем к двойственному представлению усредненного лагранжиана. Обозначим через $l_0^*(\xi)$ преобразование Лежандра от локальной энергии $l_0(\xi)$:

$$l_0^*(\xi) = \sup_{\eta} \{ \xi \cdot \eta - l_0(\eta) \}.$$

Согласно (1), l_0^* — выпуклая функция,

$$l_0^*(\xi) = |\xi_1| + \frac{1}{2} |\xi_2|^2, \quad (6)$$

если только $|\xi_1| \leq 1$. Согласно [1, 2], преобразование Лежандра усредненного лагранжиана представимо в виде

$$\widehat{L}^*(\xi) = \sup_{\eta} [\xi \cdot \eta - \widehat{L}(\eta)] = \inf_u \iint_K L^*(x, \xi + \nabla u) dx, \quad (7)$$

где $*$ обозначает преобразование Лежандра. Для построения тестовой функции воспользуемся тем же рисунком, что и ранее (см. рис. 3). Отметим, что, согласно (7), первое направление (линейного вырождения) ориентировано вдоль

спиральки. Если выбрать N , $\delta\theta$, как и выше при построении прямой оценки, то для той же пробной функции, что и выше, получим

$$\begin{aligned} E^*(\varphi) &\equiv \iint_K L^*(x, \nabla\varphi) dx \\ &\leq \sum_{n=1}^N \left[\frac{\alpha}{w_n} \sin \delta\theta + 2 \frac{\alpha^2}{w_n^2} \right] l_n w_n \leq C \alpha^2 N \\ &\leq -C \alpha^2 \log \alpha \stackrel{\text{def}}{=} E_0^*(\alpha), \quad \alpha < 1, \end{aligned}$$

где 2 во второй строчке появилось от энергии неискаженной спиральки и мы учли (6) и $\delta\theta > 0$. После перехода ко второму преобразованию Лежандра знак неравенства обращается и мы имеем

$$E(\varphi) = E^{**}(\varphi) \geq E_0^{**}(\alpha) \geq -C_- \alpha^2 / \log \alpha.$$

Поскольку, как видно из прямого вычисления, функция с асимптотикой в нуле $-\alpha^2 \log \alpha$ переходит после преобразования Лежандра в функцию с асимптотикой в нуле $-\alpha^2 / \log \alpha$, теорема полностью доказана.

Автор благодарен К. Батачариа и Р. Кону за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. Наука, М. (1993). 2. Козлов С. М. Функция анализа и его прил., **17**, вып. 3, 9–14 (1983).

Марсельский университет

Поступило в редакцию
15 декабря 1994 г.

УДК 517.98+517.53/.57

Теоремы вложения пространств Бергмана в пространства Лебега для областей с негладкой границей

© 1996. В. Н. Кудашов, В. Л. Олейник¹

1. Через $B(z, r)$ будем обозначать открытый круг в $\mathbb{C}$ с центром в точке $z \in \mathbb{C}$ и радиусом $r > 0$, и $B_r = B(0, r)$. Для произвольной области $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$, и произвольной неотрицательной борелевской меры μ на G положим $d(z) = d(z, \partial G) = \text{dist}(z, \partial G)$, $z \in G$, $B(z) = B(z, d(z)/2)$, $\mu(z) = \mu(B(z))$. Пусть $dm_\beta = d(z)^\beta dm$, где m — плоская мера Лебега, $\beta > -1$. Пусть $L_a^p(G, \mu)$ — пространство аналитических функций, принадлежащих $L^p(G, \mu)$.

¹ Данная работа частично поддержана Международным научным фондом и Академией естественных наук Российской Федерации.