Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Кудашов, В. Л. Олейник, Теоремы вложения пространств Бергмана в пространства Лебега для областей с негладкой границей, *Функци. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 1, 67–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa508>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 18:20:49

спиральки. Если выбрать N , $\delta\theta$, как и выше при построении прямой оценки, то для той же пробной функции, что и выше, получим

$$\begin{aligned} E^*(\varphi) &\equiv \iint_K L^*(x, \nabla\varphi) dx \\ &\leq \sum_{n=1}^N \left[\frac{\alpha}{w_n} \sin \delta\theta + 2 \frac{\alpha^2}{w_n^2} \right] l_n w_n \leq C\alpha^2 N \\ &\leq -C\alpha^2 \log \alpha \stackrel{\text{def}}{=} E_0^*(\alpha), \quad \alpha < 1, \end{aligned}$$

где 2 во второй строчке появилось от энергии неискаженной спиральки и мы учли (6) и $\delta\theta > 0$. После перехода ко второму преобразованию Лежандра знак неравенства обращается и мы имеем

$$E(\varphi) = E^{**}(\varphi) \geq E_0^{**}(\alpha) \geq -C_- \alpha^2 / \log \alpha.$$

Поскольку, как видно из прямого вычисления, функция с асимптотикой в нуле $-\alpha^2 \log \alpha$ переходит после преобразования Лежандра в функцию с асимптотикой в нуле $-\alpha^2 / \log \alpha$, теорема полностью доказана.

Автор благодарен К. Батачариа и Р. Кону за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. Наука, М. (1993). 2. Козлов С. М. Функция. анализ и его прил., **17**, вып. 3, 9–14 (1983).

Марсельский университет

Поступило в редакцию
15 декабря 1994 г.

УДК 517.98+517.53/.57

Теоремы вложения пространств Бергмана в пространства Лебега для областей с негладкой границей

© 1996. В. Н. Кудашов, В. Л. Олейник¹

1. Через $B(z, r)$ будем обозначать открытый круг в $\mathbb{C}$ с центром в точке $z \in \mathbb{C}$ и радиусом $r > 0$, и $B_r = B(0, r)$. Для произвольной области $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$, и произвольной неотрицательной борелевской меры μ на G положим $d(z) = d(z, \partial G) = \text{dist}(z, \partial G)$, $z \in G$, $B(z) = B(z, d(z)/2)$, $\mu(z) = \mu(B(z))$. Пусть $dm_\beta = d(z)^\beta dm$, где m — плоская мера Лебега, $\beta > -1$. Пусть $L_a^p(G, \mu)$ — пространство аналитических функций, принадлежащих $L^p(G, \mu)$.

¹ Данная работа частично поддержана Международным научным фондом и Академией естественных наук Российской Федерации.

Мы будем говорить, что $G \in A(\beta)$, $\beta > -1$, если для любых $p > 0$, $q > 0$ и для неотрицательной борелевской меры μ на G следующие условия эквивалентны:

- (i) $\mu(z)m_\beta(z)^{-1} \in L^{p/(p-q)}(G, m_\beta)$, если $q < p$, и $\sup_{z \in G} \mu(z)m_\beta(z)^{-q/p} < \infty$, если $q \geq p$;
- (ii) оператор вложения $I: L_a^p(G, m_\beta) \subset L^q(G, \mu)$ ограничен.

Меры, удовлетворяющие условию (i), обычно называются мерами Карлесона [1]. Импликация (i) $\implies$ (ii) имеет место для любой области $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$ [2]. Пример области $B_1 \setminus \{0\}$ показывает, что обратное в общем случае неверно. Известно, что $B_1 \in A(\beta)$ для любого $\beta > -1$. Возникает естественный вопрос об описании областей класса A . В настоящей работе приводится ряд условий принадлежности области классу A .

Пусть $d_0 \in (0, \infty]$, $\alpha \in (0, 1/2]$. Мы будем говорить, что G — область из класса $E(\alpha, d_0)$, если для произвольной точки $\zeta \in \partial G$ и для произвольного $r \in (0, d_0)$ найдется точка $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}$, такая, что $B(z, \alpha r) \subset (\mathbb{C} \setminus \overline{G}) \cap B(\zeta, r)$. Положим $\beta_0(G) = \log_2(1 - k^{-2})$, $k = (9\alpha + 2)/2\alpha$.

Условие принадлежности классу $E(\alpha, d_0)$ является обобщением известного условия конуса. В работе [3] показано, что при $\beta > \beta_0(G)$ для ограниченной области G , удовлетворяющей аналогичному условию, $1 \in L^1(G, m_\beta)$. Более того, для области $G \in E(\alpha, d_0)$ и $\beta > \beta_0(G)$ в окрестности границы ∂G справедлива равномерная оценка (см. [2, 4]) $\|(z - \zeta)^{-s}\| \leq C \text{dist}(\zeta, \partial G)^{2-s+\beta}$; здесь $s > 2 + \beta$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}$ и норма вычисляется в $L^1(G, m_\beta)$. Последняя оценка позволяет рассматривать отрицательные значения параметра β при доказательстве импликации (ii) $\implies$ (i) для следующих областей G , которые мы будем называть α -регулярными: либо G ограничена и $G \in E(\alpha, d_0)$ для некоторого $d_0 \in (0, \infty)$, либо $G \in E(\alpha, \infty)$.

Для таких областей справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha \in (0, 1/2]$ и область $G \subset \mathbb{C}$ α -регулярна. Тогда для любого $\beta > \beta_0(G)$ область G принадлежит классу $A(\beta)$.

Следующий пример показывает, что условие α -регулярности близко к необходимому.

Рассмотрим круг $B(1, 1)$. Пусть $z_i = 2^{-i}$, $r_i = 2^{-3i-1}$, $\rho_i = 2^{-2i-1}$. Область $G = B(1, 1) \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{B(z_i, r_i)}$ не является α -регулярной ни при каком $\alpha \in (0, 1/2]$. Теперь определим меру μ на G . Пусть $d\mu_i = \rho_i \log(\rho_i/r_i) d\lambda_i$, где $d\lambda_i$ — мера Лебега на окружности $\{z : |z - z_i| = \rho_i\}$ и $\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i$. Для меры μ оператор вложения $I: L_a^2(G, m) \subset L^2(G, \mu)$ ограничен, но $\sup_{z \in G} \mu(z)m(z)^{-1} = \infty$. Таким образом, область G не принадлежит классу $A(0)$.

2. Для конечносвязных областей вопрос принадлежности классу A решается полностью. Прежде всего заметим, что область G не принадлежит классу A , если граница ∂G содержит изолированные точки. Например, если множество граничных континуумов непусто, то оператор I для меры μ с носителем в окрестности изолированной точки $z_0 \in \partial G$ ограничен тогда и только тогда, когда $(z - z_0)^k \in L^q(G, \mu)$, где $k = \min\{k \in \mathbb{Z} : k > -(\beta + 2)/p\}$. В случае $z_0 = \infty$ это условие принимает вид $z^{-l} \in L^q(G, \mu)$, где $l = \min\{l \in \mathbb{Z} : l > (\beta + 2)/p\}$.

Более того, отсутствие изолированных точек границы гарантирует принадлежность конечносвязной области G классу A .

ТЕОРЕМА 2. Пусть G — конечносвязная область в $\mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$, и $\beta > -1$. Область G принадлежит $A(\beta)$ тогда и только тогда, когда граница ∂G не содержит изолированных точек.

При доказательстве этой теоремы существенно используется $\frac{1}{4}$ -теорема Кёбе.

Заметим, что вопрос об описании мер μ , для которых оператор I ограничен, в случае конечносвязных областей без граничных континуумов тривиален ввиду конечномерности пространства $L_a^p(G, m_\beta)$.

3. Для конкретных приложений важно знать условия на меру μ , при которых соответствующий оператор вложения I компактен. Для областей из класса A условие компактности выглядит следующим образом. При $\varepsilon > 0$ положим $G^\varepsilon = \{z \in G : d(z) \leq \varepsilon \text{ либо } d(z) \geq \varepsilon^{-1}\}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть область G принадлежит классу $A(\beta)$, $\beta > -1$. Следующие условия эквивалентны:

- (1) $\mu(z)m_\beta(z)^{-1} \in L^{p/(p-q)}(G, m_\beta)$, если $q < p$, и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{z \in G^\varepsilon} \mu(z)m_\beta(z)^{-q/p} = 0$, если $q \geq p$;
- (2) оператор вложения $I : L_a^p(G, m_\beta) \subset L^q(G, \mu)$ компактен.

Далее, классификация компактности в терминах принадлежности оператора вложения классам Шаттена–фон Неймана S_r , $r > 0$, для единичного круга [1] переносится на конечносвязные области.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G — конечносвязная область, граница которой не содержит изолированных точек. Пусть $r > 0$, $\beta > -1$ и μ — неотрицательная борелевская мера на G . Следующие условия эквивалентны:

- (1) функция $z \mapsto \mu(z)d(z)^{-\beta-2}$ лежит в $L^r(G, m)$;
- (2) оператор вложения $I : L_a^2(G, m_\beta) \subset L^2(G, \mu)$ принадлежит симметрично-нормированному идеалу S_r .

4. Теоремы 1–3 естественным образом переносятся на полициркуговые области $G = \prod_{i=1}^n G_i \subset \mathbb{C}^n$. Здесь $G_i \subset \mathbb{C}$, $G_i \neq \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$. Каждая из областей G_i должна удовлетворять условиям теоремы 1 либо теоремы 2. Для простоты сформулируем соответствующее утверждение, когда все области G_i конечносвязны.

Для $z = (z_1, \dots, z_n) \in G$ положим $\mathbf{d}(z) = \prod_{i=1}^n d(z_i, \partial G_i)$, $\pi(z) = \prod_{i=1}^n B(z_i)$.

Для $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta_i > -1$, пусть $\mathbf{m}_\beta$ — мера на G , являющаяся произведением плоских мер m_{β_i} на G_i , $i = 1, \dots, n$. При $\varepsilon > 0$ положим $G^\varepsilon = \{z \in G : \mathbf{d}(z) \leq \varepsilon \text{ либо } \mathbf{d}(z) \geq \varepsilon^{-1}\}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть G_i , $i = 1, \dots, n$, — конечносвязные области в $\mathbb{C}$ без изолированных граничных точек, G — их декартово произведение. Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta_i > -1$, $i = 1, \dots, n$, $p > 0$, $q > 0$ и μ — неотрицательная борелевская мера на G . Следующие условия эквивалентны:

- (1) $\mu(\pi(z))\mathbf{m}_\beta(\pi(z))^{-1} \in L^{p/(p-q)}(G, \mathbf{m}_\beta)$, $q < p$;
 $\sup_{z \in G} \mu(\pi(z))\mathbf{m}_\beta(\pi(z))^{-q/p} < \infty$ ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{z \in G^\varepsilon} \mu(z)\mathbf{m}_\beta(z)^{-q/p} = 0$), $q \geq p$;
- (2) вложение $L_a^p(G, \mathbf{m}_\beta) \subset L^q(G, \mu)$ ограничено (компактно).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zhu K.* Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker Inc., New York etc. (1990). 2. *Oleinik V. L., Vuorinen M.* Manuscripta math., **72**, 181–203 (1991). 3. *Троценко Д. А.* Сиб. матем. ж., **22**, 221–224 (1981). 4. *Kudashov V. N., Oleinik V. L.* An embedding theorem of Bergman space into Lebesgue space, Preprint 42, University of Helsinki (1993).

Санкт-Петербургский государственный
университет, физический факультет
e-mail: oleinik@niif.spb.su

Поступило в редакцию
19 декабря 1994 г.

УДК 517.432

Об абстрактной схеме рассеяния Лакса–Филлипса для одного класса уравнений второго порядка

© 1996. С. А. Кужель

Как известно [1], возможность применения схемы рассеяния Лакса–Филлипса к изучению динамики системы, которая задается дифференциально-операторным уравнением

$$u_{tt} = -Lu, \quad (1)$$

где L — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, зависит от существования уходящего и приходящего подпространств для группы решений этого уравнения в пространстве данных Коши. В том случае, когда оператор $-L$ — возмущение того или иного рода оператора Лапласа Δ , такие подпространства, как правило, могут быть получены на основе некоторой модификации уходящего и приходящего подпространств для свободного волнового уравнения.

В связи с этим представляют интерес задача определения множества абстрактных операторов, которые задают в (1) свободную динамику (невозмущенные операторы), и построение на их основе абстрактной схемы рассеяния Лакса–Филлипса для уравнения (1), включающей в себя как частный случай различные возмущения классического волнового уравнения. При этом понятно, что методы исследования в такой схеме будут существенно зависеть от вида возмущения свободной динамики. В частности, в настоящей заметке изучаются возмущения, которые задаются с помощью пространств граничных значений (ПГЗ). В этом случае, непосредственно изучая спектр генератора присоединенной полугруппы, можно получить описание в терминах ПГЗ сингулярностей матрицы рассеяния (теорема 2). Возмущениям, учитывающим влияние потенциала или ограниченного препятствия, будет посвящена отдельная работа.

1. Пусть L — положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пополнение линейала $\mathscr{D}(L)$ по норме $\|u\|_L^2 = (Lu, u)$ обозначим через $\mathfrak{H}_L$. В пространстве данных Коши $H_L = \mathfrak{H}_L \oplus \mathfrak{H}$ уравнение (1) естественным образом определяет унитарную группу решений задачи Коши $W_L(t)$.

Пусть B — простой максимальный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$.