Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Кужель, Об абстрактной схеме рассеяния
Лакса–Филлипса для одного класса уравнений
второго порядка, *Функц. анализ и его прил.*, 1996,
том 30, выпуск 1, 70–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa509>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:32:55

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zhu K.* Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker Inc., New York etc. (1990). 2. *Oleinik V. L., Vuorinen M.* Manuscripta math., **72**, 181–203 (1991). 3. *Троценко Д. А.* Сиб. матем. ж., **22**, 221–224 (1981). 4. *Kudashov V. N., Oleinik V. L.* An embedding theorem of Bergman space into Lebesgue space, Preprint 42, University of Helsinki (1993).

Санкт-Петербургский государственный
университет, физический факультет
e-mail: oleinik@niif.spb.su

Поступило в редакцию
19 декабря 1994 г.

УДК 517.432

Об абстрактной схеме рассеяния Лакса–Филлипса для одного класса уравнений второго порядка

© 1996. С. А. Кужель

Как известно [1], возможность применения схемы рассеяния Лакса–Филлипса к изучению динамики системы, которая задается дифференциально-операторным уравнением

$$u_{tt} = -Lu, \quad (1)$$

где L — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, зависит от существования уходящего и приходящего подпространств для группы решений этого уравнения в пространстве данных Коши. В том случае, когда оператор $-L$ — возмущение того или иного рода оператора Лапласа Δ , такие подпространства, как правило, могут быть получены на основе некоторой модификации уходящего и приходящего подпространств для свободного волнового уравнения.

В связи с этим представляют интерес задача определения множества абстрактных операторов, которые задают в (1) свободную динамику (невозмущенные операторы), и построение на их основе абстрактной схемы рассеяния Лакса–Филлипса для уравнения (1), включающей в себя как частный случай различные возмущения классического волнового уравнения. При этом понятно, что методы исследования в такой схеме будут существенно зависеть от вида возмущения свободной динамики. В частности, в настоящей заметке изучаются возмущения, которые задаются с помощью пространств граничных значений (ПГЗ). В этом случае, непосредственно изучая спектр генератора присоединенной полугруппы, можно получить описание в терминах ПГЗ сингулярностей матрицы рассеяния (теорема 2). Возмущениям, учитывающим влияние потенциала или ограниченного препятствия, будет посвящена отдельная работа.

1. Пусть L — положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пополнение линейала $\mathscr{D}(L)$ по норме $\|u\|_L^2 = (Lu, u)$ обозначим через $\mathfrak{H}_L$. В пространстве данных Коши $H_L = \mathfrak{H}_L \oplus \mathfrak{H}$ уравнение (1) естественным образом определяет унитарную группу решений задачи Коши $W_L(t)$.

Пусть B — простой максимальный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Самосопряженное расширение L симметрического оператора B^2 будем называть *невозмущенным*, если при всех $u \in \mathcal{D}(L)$ справедливо равенство $(Lu, u) = \|B^*u\|^2$.

Множество невозмущенных операторов обозначим через $\mathfrak{M}$.

Пусть L — положительное самосопряженное расширение оператора B^2 . Замыкание в H_L линейалов $\left\{ \begin{pmatrix} u \\ iBu \end{pmatrix} \right\}$ и $\left\{ \begin{pmatrix} u \\ -iBu \end{pmatrix} \right\}$ (для любого $u \in \mathcal{D}(B^2)$) обозначим через D_+ и D_- соответственно. Не ограничивая общности, будем считать, что в нижней полуплоскости дефектное число оператора B равно нулю.

ТЕОРЕМА 1. Если $L \in \mathfrak{M}$, то $H_L = D_- \oplus D_+$ и подпространства D_+ и D_- являются соответственно уходящим и приходящим подпространствами для группы $W_L(t)$, т. е. при всех $t \geq 0$

- (а) $W_L(\pm t)D_{\pm} \subset D_{\pm}$,
- (б) $\bigcap_{t \geq 0} W_L(\pm t)D_{\pm} = \{0\}$,
- (в) $\overline{\bigcup_{t \geq 0} W_L(\mp t)D_{\pm}} = H_L$.

Из теоремы с учетом [1] следует, что при $L \in \mathfrak{M}$ соответствующая матрица рассеяния (м.р.) для группы $W_L(t)$ аналитична и унитарна в комплексной плоскости. Таким образом, естественно считать, что операторы класса $\mathfrak{M}$ определяют в (1) свободную динамику.

2. Рассмотрим расширение Фридрихса $L_{\mu} = B^*B$ оператора B^2 . Очевидно, что это расширение является невозмущенным. Положим $\mathcal{H} = \text{Ker}(B^*B^* + I)$. Тогда $\mathcal{D}(B^*B^*) = \mathcal{D}(L_{\mu}) \dot{+} \mathcal{H}$. Тройка $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, где операторы $\Gamma_i: \mathcal{D}(B^*B^*) \rightarrow \mathcal{H}$ определяются формулами $\Gamma_1(u + h) = P(L_{\mu} + I)u$, $\Gamma_2(u + h) = h$ (здесь $u \in \mathcal{D}(L_{\mu})$, $h \in \mathcal{H}$ и P — ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathcal{H}$), является позитивным ПГЗ оператора B^2 , построенным по расширению L_{μ} . Произвольное положительное самосопряженное расширение L оператора B^2 есть сужение B^*B^* на $\mathcal{D}(L) = \{f = u + h \in \mathcal{D}(B^*B^*) : C\Gamma_1 f = \Gamma_2 f\}$, где ограниченный в $\mathcal{H}$ оператор C определяется однозначно [2] и в некотором смысле характеризует возмущение оператора L по сравнению с невозмущенным расширением L_{μ} . Поэтому естественно ожидать, что спектр оператора C будет определять сингулярности м.р. для группы $W_L(t)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в уравнении (1) оператор L — положительное самосопряженное расширение оператора B^2 . Тогда подпространства D_+ и D_- являются соответственно уходящим и приходящим для группы $W_L(t)$. Определяемая этими подпространствами м.р. $S(\delta)$ аналитична и унитарна при $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и является граничным значением аналитической в нижней полуплоскости операторнозначной функции $S(z)$. При этом

(а) м.р. $S(\delta)$ аналитична при $\delta = 0$ тогда и только тогда, когда $1/2 \in \rho(C|_{\Re(C - \frac{1}{2}I)})$;

(б) в нижней полуплоскости все особенности функции $S(z)$ расположены на мнимой оси и состоят из точек $z = -i|z|$, в которых либо оператор $S(z)$ не имеет обратного, либо его обратный неограничен, причем

$$0 \in \sigma_{\alpha}(S(z)) \iff 1/(2(1 + |z|)) \in \sigma_{\alpha}(C), \quad \alpha \in \{p, r, c\}.$$

ЗАМЕЧАНИЯ. (1) Аналогичную характеристику свойств м.р. $S(\delta)$ можно получить, используя при построении ПГЗ произвольное невозмущенное расширение. Выбор нами расширения Фридрихса обусловлен лишь большей наглядностью формул в пп. (а) и (б) теоремы 2.

(2) Используя [3], заключаем, что подобное теореме 2 утверждение можно сформулировать и для расширений, имеющих на отрицательной полуоси конечное число нормальных собственных значений $\{-\lambda_j^2\}_{j=1}^n$. В этом случае у функции $S(z)$ в точках $\{-i|\lambda_j|\}_{j=1}^n$ появляются полюсы первого порядка и утверждения (а) и (б) остаются верными (при $z \neq -i|\lambda_j|$).

3. Покажем, что в $L_2(\mathbb{R}^n)$ (n нечетно) оператор $-\Delta$, $\mathcal{D}(\Delta) = W_2^2(\mathbb{R}^n)$, является невозмущенным. Для этого на множестве $S(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим отображение

$$F: u(x) \rightarrow \left(\frac{\partial^m}{\partial s^m} Ru \right)(s, w), \quad s \geq 0, \quad w \in S^{n-1},$$

где Ru — преобразование Радона функции $u(x)$ [4], S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ и $m = (n-1)/2$. Используя формулу Планшереля для преобразования Радона, заключаем, что замыкание оператора F в $L_2(\mathbb{R}^n)$ является изометрическим отображением на пространство $L_2(\mathbb{R}_+, N)$, где $N = L_2(S^{n-1})$. В пространстве $L_2(\mathbb{R}_+, N)$ рассмотрим простой максимальный симметрический оператор $i d/ds$, $\mathcal{D}(d/ds) = \overset{\circ}{W}_2^1(\mathbb{R}_+, N)$. С учетом [4] легко видеть, что оператор $-\Delta$ является невозмущенным расширением оператора B^2 , где $B = iF^{-1}(d/ds)F$. Положим для определенности $n = 3$ и детальнее опишем оператор B^2 . Для этого в пространстве N рассмотрим ортонормированный базис $\{Y_k^l(\omega)\}_{k=0}^\infty$, $l = 0, \pm 1, \dots, \pm k$, сферических гармоник. Используя [5], можно показать, что

$$B^2 = -\Delta|_{\mathcal{D}}, \quad \mathcal{D} = \left\{ u(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^3) : u(0) = 0, \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(x)}{|x|^{\alpha_k}} Y_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right) dx = 0 \right\},$$

где $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = 2$ при нечетных и $\alpha_k = 3$ при четных k (в последнем случае интеграл понимается в смысле главного значения).

Таким образом, если в правой части уравнения (1) стоит произвольное самосопряженное расширение оператора $-\Delta|_{\mathcal{D}}$ (с дискретным спектром на отрицательной полуоси), то приведенные в данной заметке результаты позволяют определить сингулярности соответствующей м.р. В частности, если L_β , $\mathcal{D}(L_\beta) = \{u(x) + u(0)\beta e^{-|x|}/|x| : \beta \in \mathbb{R}, u(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^3)\}$, есть самосопряженное расширение симметрического оператора Лапласа $-\Delta_0$, $\mathcal{D}(\Delta_0) = \{u(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^3) : u(0) = 0\}$, то, используя теорему 2, мы получаем связь между сингулярностями м.р. и параметром β .

ЛИТЕРАТУРА

1. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. Мир, М. (1971).
2. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Наукова думка, Киев (1984).
3. Кужель С. А. Докл. АН Украины, № 4, 19–22 (1993).
4. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и свя-

занные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз, М. (1962). 5. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Мир, М. (1974).

Институт математики
НАН Украины

Поступило в редакцию
8 апреля 1994 г.
В переработанном виде
2 октября 1995 г.

УДК 517.9

Замечание о предельных операторах

© 1996. В. Г. КУРБАТОВ

Настоящая заметка тесно связана с работами [1–3]. В ней результат статьи [1] частично переносится на случай пространств L_p ($p \neq 2$) и операторов общего вида (подробнее см. ниже).

Пусть E — конечномерное комплексное банахово пространство и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое подмножество. Обозначим через $L_p(\Omega)$ пространство классов совпадающих почти всюду измеримых функций $u: \Omega \rightarrow E$ с соответствующей нормой; положим $L_p = L_p(\mathbb{R}^n)$.

Для $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ символом $\langle \xi, x \rangle$ будем обозначать скалярное произведение. Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ положим $(\Psi_\xi u)(x) = e^{i\langle \xi, x \rangle} u(x)$. Пусть $T: L_p(\Omega) \rightarrow L_p$ — линейный ограниченный оператор. Оператор $\tilde{T}$ назовем *правым предельным* для T , если существует такая последовательность $\xi_k \in \mathbb{R}^n$, что $|\xi_k| \rightarrow +\infty$ и последовательность $T\{\xi_k\} = \Psi_{\xi_k}^{-1} T \Psi_{\xi_k}$ сильно (т. е. на любом $u \in L_p(\Omega)$) сходится к $\tilde{T}$.

Положим

$$|T|_+ = \inf \{ \|Tu\| : \|u\| = 1 \}, \quad |T|_{\lambda+} = \sup \{ |T: M \rightarrow L_p|_+ : \text{codim } M < \infty \}$$

(имеется в виду, что M пробегает всевозможные замкнутые подпространства $L_p(\Omega)$ конечной коразмерности). Очевидно, что $|T|_+ > 0$ тогда и только тогда, когда ядро оператора T состоит из нуля, а его образ замкнут, и $|T|_{\lambda+} > 0$ тогда и только тогда, когда ядро оператора T конечномерно, а его образ замкнут. Величина $|T|_+$ введена в [4], по поводу величины $|T|_{\lambda+}$ см. [5].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p < \infty$, $T: L_p(\Omega) \rightarrow L_p$ — линейный ограниченный оператор и $\tilde{T}$ — правый предельный оператор для T . Тогда $|T|_{\lambda+} \leq |\tilde{T}|_+$.

В статьях [1–3] наряду с описанными выше «частотными» предельными операторами рассматриваются также «координатные» предельные операторы, определяемые как пределы последовательностей $S_{h_k}^{-1} T S_{h_k}$, где $(S_h u)(x) = u(x - h)$. В [1, 2] установлено, что для псевдодифференциальных операторов в пространстве L_2 [1] и в некоторых других специальных пространствах [2] фредгольмовость эквивалентна обратимости всех «частотно-координатных» предельных операторов. В приводимом ниже следствии формулируется лишь половина «частотной» части этого утверждения, но для более широкого класса операторов