Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Курбатов, Замечание о предельных операторах, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 1, 73–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa510>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:28:01

занные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз, М. (1962). 5. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Мир, М. (1974).

Институт математики
НАН Украины

Поступило в редакцию
8 апреля 1994 г.
В переработанном виде
2 октября 1995 г.

УДК 517.9

Замечание о предельных операторах

© 1996. В. Г. КУРБАТОВ

Настоящая заметка тесно связана с работами [1–3]. В ней результат статьи [1] частично переносится на случай пространств L_p ($p \neq 2$) и операторов общего вида (подробнее см. ниже).

Пусть E — конечномерное комплексное банахово пространство и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое подмножество. Обозначим через $L_p(\Omega)$ пространство классов совпадающих почти всюду измеримых функций $u: \Omega \rightarrow E$ с соответствующей нормой; положим $L_p = L_p(\mathbb{R}^n)$.

Для $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ символом $\langle \xi, x \rangle$ будем обозначать скалярное произведение. Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ положим $(\Psi_\xi u)(x) = e^{i\langle \xi, x \rangle} u(x)$. Пусть $T: L_p(\Omega) \rightarrow L_p$ — линейный ограниченный оператор. Оператор $\tilde{T}$ назовем *правым предельным* для T , если существует такая последовательность $\xi_k \in \mathbb{R}^n$, что $|\xi_k| \rightarrow +\infty$ и последовательность $T\{\xi_k\} = \Psi_{\xi_k}^{-1} T \Psi_{\xi_k}$ сильно (т. е. на любом $u \in L_p(\Omega)$) сходится к $\tilde{T}$.

Положим

$$|T|_+ = \inf \{ \|Tu\| : \|u\| = 1 \}, \quad |T|_{\lambda+} = \sup \{ |T: M \rightarrow L_p|_+ : \text{codim } M < \infty \}$$

(имеется в виду, что M пробегает всевозможные замкнутые подпространства $L_p(\Omega)$ конечной коразмерности). Очевидно, что $|T|_+ > 0$ тогда и только тогда, когда ядро оператора T состоит из нуля, а его образ замкнут, и $|T|_{\lambda+} > 0$ тогда и только тогда, когда ядро оператора T конечномерно, а его образ замкнут. Величина $|T|_+$ введена в [4], по поводу величины $|T|_{\lambda+}$ см. [5].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p < \infty$, $T: L_p(\Omega) \rightarrow L_p$ — линейный ограниченный оператор и $\tilde{T}$ — правый предельный оператор для T . Тогда $|T|_{\lambda+} \leq |\tilde{T}|_+$.

В статьях [1–3] наряду с описанными выше «частотными» предельными операторами рассматриваются также «координатные» предельные операторы, определяемые как пределы последовательностей $S_{h_k}^{-1} T S_{h_k}$, где $(S_h u)(x) = u(x - h)$. В [1, 2] установлено, что для псевдодифференциальных операторов в пространстве L_2 [1] и в некоторых других специальных пространствах [2] фредгольмовость эквивалентна обратимости всех «частотно-координатных» предельных операторов. В приводимом ниже следствии формулируется лишь половина «частотной» части этого утверждения, но для более широкого класса операторов

и чуть более общего понятия предельного оператора. Перенесению «координатной» части результатов работ [1, 2] на случай операторов общего вида посвящена статья [3].

Ниже будем предполагать, что T — линейный ограниченный оператор, действующий из L_p в L_p .

Оператор $\tilde{T}$ назовем *двусторонним предельным* для T , если существует такая последовательность $\xi_k \in \mathbb{R}^n$, что $|\xi_k| \rightarrow +\infty$, $T\{\xi_k\}$ сильно сходится к $\tilde{T}$, а сопряженная последовательность $T\{\xi_k\}^*$ сильно сходится к $\tilde{T}^*$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $1 < p < \infty$ и оператор T фредгольмов. Тогда все двусторонние предельные операторы $\tilde{T}$ обратимы, причем нормы обратных равномерно ограничены:

$$\|\tilde{T}^{-1}\| \leq 1/|T|_{\lambda+}.$$

Обозначим через $L_{p\Omega}$ подпространство пространства L_p , состоящее из функций, носители которых лежат в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Очевидно, что $L_{p\Omega}$ канонически изоморфно $L_p(\Omega)$. Положим $|T|_{\lambda+} = \inf |T : L_{p\Omega} \rightarrow L_p|_{\lambda+}$, где инфимум берется по всем ограниченным измеримым подмножествам $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p < \infty$, $T : L_p \rightarrow L_p$ и $\tilde{T}$ — правый предельный оператор. Тогда $|T|_{\lambda+} \leq |\tilde{T}|_+$.

Оператор T назовем *локально фредгольмовым* (подробнее см. [6]), если $|T|_{\lambda+} > 0$ и $|T^*|_{\lambda+} > 0$. Будем говорить, что линейный ограниченный оператор $K : L_p \rightarrow L_p$ является *локально компактным*, если для любого ограниченного измеримого подмножества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ сужения $K : L_{p\Omega} \rightarrow L_p$ и $K^* : L_{p\Omega}^* \rightarrow L_p^*$ являются компактными операторами. Очевидно, если K локально компактен, то $1 + K$ локально фредгольмов. Простейший пример локально компактного оператора в L_p ($1 < p < \infty$) — оператор свертки с функцией класса $L_1 \cap L_\infty$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $1 < p < \infty$ и оператор $T : L_p \rightarrow L_p$ является локально фредгольмовым. Тогда все двусторонние предельные операторы $\tilde{T}$ для T обратимы, причем нормы обратных равномерно ограничены:

$$\|\tilde{T}^{-1}\| \leq 1/|T|_{\lambda+}.$$

ПРИМЕР. Пусть $n = 1$, $E = \mathbb{C}$, $1 < p < \infty$ и

$$(Tu)(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(x)u(x - h_m) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m(x)(Hu)(x - h_m) + (Ku)(x),$$

где

$$(Hu)(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(s)}{s - x} ds$$

— оператор Гильберта, K — локально компактный оператор, $h_m \in \mathbb{R}$, a_m и b_m — функции класса L_∞ , причем b_m непрерывно дифференцируемы, а

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|a_m\|_{L_\infty} + \sum_{m=1}^{\infty} \|b_m\|_{L_\infty} < \infty.$$

Из непрерывной дифференцируемости коэффициентов b_m следует, что сопряженный к T имеет такой же вид, что и T . Нетрудно видеть, что операторы

$$(D_{\pm}u)(x) = \sum_{m=1}^{\infty} [a_m(x) \pm b_m(x)]u(x - h_m)$$

являются двусторонними предельными для T . Поэтому из следствия теоремы 2 вытекает, что *необходимым условием локальной фредгольмовости оператора T является обратимость операторов D_+ и D_-* . Аналогичное явление имеет место и при замене H некоторыми сингулярными интегралами [7] в $\mathbb{R}^n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ланге Б. В., Рабинович В. С. Матем. сб., **129**, 175–185 (1986).
2. Рабинович В. С. Сиб. матем. ж., **19**, 149–161 (1988).
3. Рабинович В. С. Матем. заметки, **51**, 90–101 (1992).
4. Gindler H. A., Taylor A. E. Studia Math., **22**, 15–41 (1962/63).
5. Азмеров Р. Р. и др. Меры некомпактности и уплотняющие операторы. Наука, Новосибирск (1986).
6. Курбатов В. Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. Изд-во Воронежского гос. ун-та (1990).
7. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. Мир, М. (1973).

Воронежский государственный
университет

Поступило в редакцию
12 мая 1994 г.

УДК 517.986

Эпиморфизмы и разреженные подмножества банаховой алгебры

© 1996. Ф. Г. Максудов, Н. М. Садиков, Ю. В. Туровский¹

В работе рассматриваются условия разреженности образа операторов, ассоциированных с эпиморфизмом банаховой алгебры. Ранее разреженность в смысле принадлежности множеству квазинильпотентных элементов рассмотрена для дифференцирований в [1–4] и др. В данной работе в качестве эталона для разреженности образа берутся подмножества элементов банаховой алгебры с конечным спектром.

Полученные результаты можно охарактеризовать следующим образом. Эпиморфизмы, удовлетворяющие условию разреженности образа ассоциированных с ними операторов, или некоторые их степени должны индуцироваться алгебраическими операторами во всех неприводимых представлениях, кроме, возможно, конечного числа конечномерных.

1. Пусть A — унитарная комплексная банахова алгебра, $\text{Rep } A$ — множество всех ее представлений линейными операторами, $\text{Irr } A$ — множество всех неприводимых представлений и $\text{Fin } A$ — множество всех конечных прямых сумм

¹Третий из авторов благодарит Международный фонд «Культурная инициатива» и Академию естественных наук России за поддержку.