Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Г. Максудов, Н. М. Садиков, Ю. В. Туровский,
Эпиморфизмы и разреженные подмножества банаховой алгебры, *Функци. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 1, 75–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa511>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 02:36:41

Из непрерывной дифференцируемости коэффициентов b_m следует, что сопряженный к T имеет такой же вид, что и T . Нетрудно видеть, что операторы

$$(D_{\pm}u)(x) = \sum_{m=1}^{\infty} [a_m(x) \pm b_m(x)]u(x - h_m)$$

являются двусторонними предельными для T . Поэтому из следствия теоремы 2 вытекает, что *необходимым условием локальной фредгольмовости оператора T является обратимость операторов D_+ и D_-* . Аналогичное явление имеет место и при замене H некоторыми сингулярными интегралами [7] в $\mathbb{R}^n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ланге Б. В., Рабинович В. С. Матем. сб., **129**, 175–185 (1986).
2. Рабинович В. С. Сиб. матем. ж., **19**, 149–161 (1988).
3. Рабинович В. С. Матем. заметки, **51**, 90–101 (1992).
4. Gindler H. A., Taylor A. E. Studia Math., **22**, 15–41 (1962/63).
5. Азмеров Р. Р. и др. Меры некомпактности и уплотняющие операторы. Наука, Новосибирск (1986).
6. Курбатов В. Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. Изд-во Воронежского гос. ун-та (1990).
7. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. Мир, М. (1973).

Воронежский государственный
университет

Поступило в редакцию
12 мая 1994 г.

УДК 517.986

Эпиморфизмы и разреженные подмножества банаховой алгебры

© 1998. Ф. Г. Максудов, Н. М. Садиков, Ю. В. Туровский¹

В работе рассматриваются условия разреженности образа операторов, ассоциированных с эпиморфизмом банаховой алгебры. Ранее разреженность в смысле принадлежности множеству квазинильпотентных элементов рассмотрена для дифференцирований в [1–4] и др. В данной работе в качестве эталона для разреженности образа берутся подмножества элементов банаховой алгебры с конечным спектром.

Полученные результаты можно охарактеризовать следующим образом. Эпиморфизмы, удовлетворяющие условию разреженности образа ассоциированных с ними операторов, или некоторые их степени должны индуцироваться алгебраическими операторами во всех неприводимых представлениях, кроме, возможно, конечного числа конечномерных.

1. Пусть A — унитарная комплексная банахова алгебра, $\text{Rep } A$ — множество всех ее представлений линейными операторами, $\text{Irr } A$ — множество всех неприводимых представлений и $\text{Fin } A$ — множество всех конечных прямых сумм

¹Третий из авторов благодарит Международный фонд «Культурная инициатива» и Академию естественных наук России за поддержку.

представлений из $\text{Irr } A$. Подмножество $P \subset A$ называется n -разреженным, если отображение $a \rightarrow \tau(a)x$, $a \in P$, не является сюръективным ни для каких представления $\tau \in \text{Fin } A$, являющегося суммой n неприводимых представлений, и вектора x из пространства представления X_τ . Такими подмножествами являются естественные подмножества алгебры A , состоящие из элементов с конечным спектром.

Пусть $F_n(A)$ — множество всех элементов из A , содержащих в своем спектре не более n точек. Через $F_0(A)$ обозначим множество всех квазинильпотентных элементов из A (т.е. элементов, имеющих нулевой спектр). Нетрудно видеть, что $F_n(A)$ является $(n+1)$ -разреженным для любого $n \geq 0$. 1-разреженные (просто разреженные) подмножества рассматривались в [4, 5].

Иные примеры разреженных множеств можно построить следующим образом. Отметим, что n -разреженное множество $(n+1)$ -разрежено. Далее, если $P \subset A$ n -разрежено, то aPb также n -разрежено для любых $a \in A^{-1}$, $b \in A$. В общем случае спектры элементов $aF_n(A)b$ могут не быть конечными.

Мы изучаем эпиморфизмы $T: A \rightarrow A$, подчиненные условию n -разреженности образа ассоциированных с T операторов. Это условие эквивалентно следующему: существует целое $m \geq 1$ и n -разреженное множество $P \subset A$, такие, что

$$T^m(a) \in \sum_{i=0}^{m-1} AT^i(a) + P \quad (*)$$

для любого $a \in A$.

Один из основных результатов можно сформулировать так: если образ полинома от T n -разрежен, то T — алгебраический оператор по модулю радикала Джекобсона.

2. Пусть T — эпиморфизм алгебры A , т.е. линейный сюръективный оператор, такой, что $T(ab) = T(a)T(b)$ для всех $a, b \in A$. Простые примеры доставляют внутренние автоморфизмы $E_a(b) = aba^{-1}$ для всех $a \in A^{-1}$, $b \in A$ (A^{-1} — множество обратимых элементов алгебры A).

Скажем, что эпиморфизм T индуцирован в представлении $\tau \in \text{Rep } A$ оператором t , если $\tau T = E_t \tau$, где E_t — внутренний автоморфизм алгебры $L(X_\tau)$ всех линейных операторов, действующих в пространстве представления X_τ . Если $P \subset L(X_\tau)$, то через $\text{Cyc } P$ обозначим множество циклических для P векторов из X_τ , т.е. таких $x \in X_\tau$, что $Px = X_\tau$. Эпиморфизм T называется n -транзитивным в $\tau \in \text{Rep } A$, если для любых $x_0, x_1, \dots, x_n \in \text{Cyc } \tau A$ и $y_0, y_1, \dots, y_n \in X_\tau$ найдется $a \in A$, такой, что $\tau T^i(a)x_i = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Назовем T транзитивным в τ , если он 1-транзитивен в τ . В [5] показано, что

1) эпиморфизм T индуцирован в $\tau \in \text{Irr } A$ оператором тогда и только тогда, когда он нетранзитивен в τ ;

2) если T^i транзитивны в $\tau \in \text{Irr } A$ для $i = 1, \dots, m$, то T m -транзитивен в τ ;

3) если T m -транзитивен в $\pi \in \text{Irr } A$, то для прямой суммы $\tau = \pi^n \in \text{Fin } A$ и для любых $x \in \text{Cyc } \tau A$ и $y_0, y_1, \dots, y_m \in X_\tau$ найдется $a \in A$, такой, что $\tau T^i(a)x = y_i$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Первые два утверждения можно переформулировать иным образом. Сначала заметим, что эпиморфизм T банаховой алгебры A индуцирует отображение (ко-

торое мы будем обозначать тем же символом) $T: \text{Rep } A \rightarrow \text{Rep } A$ и, в частности, отображение из $\text{Irr } A$ в себя по формуле $T\tau = \tau T$ для всех $\tau \in \text{Rep } A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Эпиморфизм T m -транзитивен в $\tau \in \text{Irr } A$ тогда и только тогда, когда среди представлений $\tau, T\tau, \dots, T^m\tau$ нет попарно эквивалентных.*

Напомним, что представления τ и π алгебры A эквивалентны, если существует обратимый линейный оператор $S: X_\tau \rightarrow X_\pi$, сплетающий эти представления (т.е. $\pi(a)S = S\tau(a)$ для всех $a \in A$).

Из доказательства третьего утверждения в [5] ясно, что если T является m -транзитивным в $\tau \in \text{Irr } A$, то T m -транзитивен в прямой сумме τ^n для любого n . Следующее предложение усиливает это утверждение. Предварим его определением. Набор P представлений $\pi_1, \dots, \pi_n$ называется *m -независимым относительно T* , если $T^k\pi_i$ не эквивалентно π_j ни для каких $\pi_i, \pi_j \in P$ ($i \neq j$) и $k = 1, \dots, m$. Отметим, что если T m -транзитивен в $\tau \in \text{Irr } A$, то любой набор, состоящий из эквивалентных τ представлений, будет m -независимым относительно T .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если $\pi_1, \dots, \pi_n \in \text{Irr } A$ m -независимы относительно эпиморфизма T и T m -транзитивен в каждом из них, то T является m -транзитивным в прямой сумме $\pi_1 \cdots \pi_n$.*

3. T -оператором порядка m назовем всякое отображение из A в себя вида $a \rightarrow T^m(a) + \psi_{m-1}(a)T^{m-1}(a) + \dots + \psi_0(a)a$, где $\psi_0, \dots, \psi_{m-1}$ — произвольные (вообще говоря, нелинейные) отображения A в себя. Через $\text{Im } S$, как обычно, обозначается образ оператора S . Справедливо следующее предложение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть T — эпиморфизм алгебры A , $\tau \in \text{Rep } A$ и $\text{Cus } \tau(\text{Im } S) \neq \text{Cus } \tau A$ для некоторого T -оператора S порядка m . Тогда эпиморфизм T не m -транзитивен в представлении τ .*

В частности, если $\tau = \pi^n$ для некоторого $\pi \in \text{Irr } A$, то T не m -транзитивен в π и, следовательно, T^i для некоторого $i \leq m$ индуцирован в представлении π оператором.

Напомним, что оператор называется алгебраическим, если он является корнем полинома. Под *степенью алгебраичности* такого оператора мы понимаем степень его минимального аннулирующего полинома.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть T — эпиморфизм алгебры A , а n и m — натуральные числа. Тогда существует число k , такое, что эпиморфизм T^i для некоторого натурального $i \leq m$ индуцирован в представлении $\pi \in \text{Irr } A$ алгебраическим оператором со степенью алгебраичности $\leq k$, если выполнены условия $\dim X_\pi \geq n$ и $\text{Cus } \pi^n(\text{Im } S) = \emptyset$ для некоторого T -оператора S порядка m .*

Отметим, что при таких условиях эпиморфизм T является в представлении π алгебраическим оператором (т.е. $\pi r(T)(a) = 0$ для всех $a \in A$ и некоторого полинома r).

4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Если образ некоторого T -оператора порядка m является n -разреженным в A , то существует лишь конечное (возможно, нулевое) число, меньшее чем n , неприводимых попарно неэквивалентных пред-*

ставлений, m -независимых относительно эпиморфизма T и таких, что T m -транзитивен в каждом из них. Размерность пространства такого представления (если оно имеется) должна быть меньше n .

Отсюда и из предложения 4 следует, что если образ T -оператора состоит из элементов с нулевым спектром, то существует число k , такое, что T^k индуцирован во всех неприводимых представлениях алгебраическими операторами, степени алгебраичности которых ограничены сверху некоторым числом, не зависящим от конкретных представлений.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что A — полупростая банахова алгебра с единицей и условие (*) справедливо для некоторого эпиморфизма T и любого $a \in A$. Тогда A содержит центральный идемпотент e , такой, что*

- (i) *алгебра eA конечномерна;*
- (ii) *eA и $(1 - e)A$ инвариантны относительно T ;*
- (iii) *существуют $R \subseteq \text{Irr } A$ и число k , такие, что в любом $\pi \in R$ эпиморфизм T^i для некоторого натурального $i \leq m$ индуцирован алгебраическим оператором степени алгебраичности $\leq k$ и равенство $\pi a = 0$ для $a \in (1 - e)A$ и для всех $\pi \in R$ влечет за собой $a = 0$.*

Пусть $\text{Irr}(A, T, m)$ — совокупность неприводимых представлений π алгебры A , таких, что некоторая степень T^i эпиморфизма T при $1 \leq i \leq m$ индуцирована в π алгебраическим оператором t_π . Считая T^i наименьшей такой степенью, положим для $\pi \in \text{Irr}(A, T, m)$

$$\sigma_\pi^*(T) = \{\lambda\mu^{-1} : \lambda, \mu \text{ из спектра } \sigma(t_\pi)\}.$$

$\sigma_\pi^*(T)$ не зависит от конкретного выбора оператора t_π (вследствие неприводимости представления).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть $\text{Im } p(T)$ n -разрежен для некоторого полинома p степени m . Тогда $\bigcup \{\sigma_\pi^*(T) : \pi \in \text{Irr}(A, T, m)\}$ конечно.*

Из теоремы 1 и предложения 6 вытекают следующие результаты.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\text{Im } p(T)$ n -разрежен для некоторого полинома p . Тогда эпиморфизм T алгебраичен по модулю радикала (Джекобсона).*

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть мощность спектра $\sigma(p(T)(a))$ не превышает n для любого $a \in A$ и некоторого полинома p . Тогда эпиморфизм T алгебраичен по модулю радикала.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Le Page C. C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A–B, **265**, 235–237 (1967).
2. Ptak V. Proc. Edinburgh Math. Soc., **22**, 207–211 (1979).
3. Vrbova P. Comment. Math. Univ. Carolin., **22**, No. 1, 145–148 (1981).
4. Туровский Ю. В., Шульман В. С. Матем. заметки, **42**, № 2, 305–314 (1987).
5. Туровский Ю. В. Спектр. теория опер. и ее прил., Баку: Элм, **8**, 201–218 (1986).