Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Г. Парфенов, Асимптотика поперечников по Гельфанду и Бернштейну некоторых классов аналитических функций, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 1, 79–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa512>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:47:09

УДК 517.47+517.51

Асимптотика поперечников по Гельфанду и Бернштейну некоторых классов аналитических функций

© 1996. О. Г. ПАРФЕНОВ

1. Пусть H^p , $1 \leq p \leq \infty$, — класс Харди в единичном круге $\mathbb{D}$, $T_r = \{z : |z| = r\}$, $0 < r \leq 1$, и $\mathbb{T} = T_1$. В работах автора [1, 2] исследовались поперечники по Гельфанду единичного шара BH^p в метрике пространства $L_q(T_r, \mu)$ при $p \geq q$, где μ — произвольная мера на T_r .

В работе Фишера и Стесина [3] показано, что при $p \geq q$ поперечники по Гельфанду единичного шара BH^p в метрике пространства $L_q(K, \mu)$, K — некоторый компакт в $\mathbb{D}$, совпадают с колмогоровскими и линейными. При $p < q$ пока известно немного об интересующих нас поперечниках (см., например, [4]). В работе автора [5] получены теоремы типа Исмагилова для поперечников по Гельфанду и Бернштейну. Сопоставляя результаты работ [1] и [5], можно получить нетривиальные асимптотические оценки снизу для поперечников по Гельфанду и сверху для поперечников по Бернштейну. Получить обратные оценки на основе результатов [1, 5] затруднительно. Данная работа и посвящена получению этих оценок. Автор пользуется случаем, чтобы выразить благодарность Российской академии наук за поддержку работы (грант РФФИ 95-01-00348).

2. Пусть ν — некоторая мера на единичной окружности $\mathbb{T}$ и m — нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$. Положим

$$G(\nu) = \exp \left(\int_{\mathbb{T}} \ln(d\nu/dm) dm \right).$$

Обозначим через $H^2(\nu)$ весовой класс Харди, т. е. замыкание множества многочленов в пространстве $L_2(\mathbb{T}, \nu)$.

Имеет место следующая теорема:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $G(\nu) \neq 0$. Тогда справедливо соотношение¹

$$d^n(\nu) \equiv d^n(BH^2(\nu), L_\infty(T_r)) \sim G^{-1/2}(\nu)(1 - r^2)^{-1/2}r^n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Поясним основные идеи доказательства теоремы 1. Для оценки сверху введем оператор вложения $J_0: H^2(\nu) \rightarrow L_2(T_r)$. В силу [1] имеем асимптотическую формулу для сингулярных чисел:

$$s_n(J_0) \sim G^{-1/2}(\nu)r^n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

В силу результатов работы [5] имеем

$$d^n(\nu) \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} s_k^2(J_0) \right)^{1/2}. \quad (3)$$

¹ $a_n \sim b_n, n \rightarrow \infty \iff \lim a_n/b_n = 1, n \rightarrow \infty$.

Из (2) и (3) следует требуемая асимптотическая оценка снизу в (1). Для доказательства оценки сверху рассмотрим набор подпространств $\{B_n \cdot H^2(\nu)\}$, B_n — произведение Бляшке степени n . Имеем

$$d^n(\nu) \leq \inf_{B_n} \sup_{f \in BH^2(\nu)} \|B_n f\|_{L_\infty(T_r)}. \quad (4)$$

Используя формулу для нормы оператора, действующего из гильбертова пространства в $L_\infty(T_r)$ (см. [5]) и формулу для предельного ядра (см. [6, с. 70]), получим

$$(d^n(\nu))^2 \leq (1 - r^2)^{-1} \inf_{B_n} \sup_{|z|=r} |B_n(z)|^2 |g_\nu(z)|^{-2}; \quad (5)$$

здесь g_ν — функция Сегё меры ν (см. [6, с. 37–40]). Из леммы об аппроксимации непрерывных положительных функций модулями произведений Бляшке [1] получим

$$\inf_{B_n} \sup_{|z|=r} |B_n(z)|^2 |g_\nu(z)|^{-2} \sim G^{-1}(\nu) r^{2n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Оценки (4)–(6) и дают в совокупности асимптотическую оценку сверху в теореме 1. В качестве следствия отметим такой результат:

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbb{K}: L_1(T) \rightarrow L_2(T_r, \mu)$, $G(\mu) \neq 0$, — интегральный оператор с ядром Коши:

$$(\mathbb{K}f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Тогда для поперечников по Колмогорову оператора $\mathbb{K}$ имеем

$$d_n(\mathbb{K}) \sim G^{1/2}(\mu)(1 - r^2)^{-1/2} r^n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Подчеркнем, что мера μ произвольна (при условии, что $G(\mu) \neq 0$).

3. Для поперечников по Бернштейну имеем следующий результат:

ТЕОРЕМА 3. Пусть μ — произвольная мера на T_r , $G(\mu) \neq 0$. Тогда

$$b_n(\mu) \equiv b_n(BH^\infty, L_2(T_r, \mu)) \sim G^{1/2}(\mu)(1 - r^2)^{1/2} r^n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство теоремы 3 очень похоже на доказательство теоремы 1, и мы его опускаем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Парфенов О. Г. Матем. сб., **117** (159), № 2, 279–285 (1982).
2. Парфенов О. Г. Матем. заметки, **37**, № 2, 171–175 (1985).
3. Fisher S., Stessin M. The n -widths of unit ball of H^q . Preprint, Northwestern University, Evanston (1990).
4. Парфенов О. Г. Матем. заметки, **26**, вып. 3, 85–87 (1992).
5. Парфенов О. Г. Зап. научн. семинаров ЛОМИ, **217**, 112–129 (1994).
6. Гренандер У., Сегё Г. Теплицевы формы и их приложения. ИЛ, М. (1961).