Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, О кохомологичности коциклов,
отвечающих эргодическим косым произведениям,
Функц. анализ и его прил., 1996, том 30, вы-
пуск 1, 84–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 07:53:23

УДК 512.4

О кохомологичности коциклов, отвечающих эргодическим косым произведениям

© 1996. В. В. Рыжиков¹

Пусть $(X, \mathcal{B}, \mu)$ — пространство Лебега, $\mu(X) = 1$, а $\mathcal{B}$ есть σ -алгебра всех классов μ -измеримых множеств (два множества принадлежат одному классу, если различаются на множество меры 0). Обозначим через $\text{Aut}(\mu)$ группу всех сохраняющих меру обратимых преобразований пространства X , которые также называются автоморфизмами. Пусть фиксированы $S \in \text{Aut}(\mu)$ и семейство автоморфизмов $\{T_x : x \in X\}$, измеримо зависящее от X . Отображение $R: (X \times Y) \rightarrow (X \times Y)$, определенное при $X = Y$ равенством $R(x, y) = (S(x), T_x(y))$, называется косым произведением над S . Будем обозначать такое отображение R через $S \times \{T_x\}$. Косому произведению R отвечает коцикл Φ со значениями в $\text{Aut}(\mu)$: $\Phi(x, n) = T_{S^{n-1}(x)} \cdots T_{S(x)} T_x$ (общее определение коцикла см. в [1]).

Косые произведения $R = S \times \{T_x\}$ и $\tilde{R} = S \times \{\tilde{T}_x\}$ будем называть *эквивалентными*, если для некоторого измеримого семейства автоморфизмов $\{J_x : x \in X\}$ выполнено условие $\tilde{T}_x = J_{S(x)}^{-1} T_x J_x$. Эквивалентные косые произведения метрически изоморфны, а отвечающие им коциклы кохомологичны, т. е.

$$\tilde{\Phi}(x, n) = J_{S(x)}^{-1} \Phi(x, n) J_x. \quad (1)$$

В связи с этой эквивалентностью возникает несколько задач. Например, верно ли, что эргодическое косое произведение $S \times \{T_x\}$ эквивалентно такому $S \times \{P_x\}$, что множество $\{P_x : x \in X\}$ является а) двухэлементным, б) конечным, в) счетным? Этот вопрос сформулировал В. И. Оселедец.

Настоящая заметка касается другой задачи: для какого множества $F \subset \text{Aut}(\mu)$ косое произведение $S \times \{T_x\}$ эквивалентно $S \times \{P_x\}$, такому, что $\{P_x\} \subset F$. В качестве F можно взять семейство всех автоморфизмов периода m ($m \geq 2$). В заметке рассматривается случай $m = 2$.

Ниже E обозначает тождественный автоморфизм. Напомним, что автоморфизм S называется эргодическим, если любое S -инвариантное измеримое множество имеет меру 0 или 1.

ТЕОРЕМА. Пусть $S \in \text{Aut}(\mu)$ — эргодический автоморфизм пространства Лебега $(X, \mathcal{B}, \mu)$ и задано косое произведение $R = S \times \{T_x\}$. Тогда R эквивалентно некоторому $\bar{R} = S \times \{P_x\}$, удовлетворяющему условию $P_x^2 = E$.

В доказательстве используется следующее утверждение.

ЛЕММА. Пусть $\{T_x : x \in X\}$ — измеримое семейство автоморфизмов пространства Лебега $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Тогда найдутся измеримые семейства $\{F_x\}$, $\{G_x\}$ и $\{H_x\}$, такие, что $T_x = H_x G_x F_x$ и $F_x^2 = G_x^2 = H_x^2 = E$.

¹Работа поддержана Международным научным фондом, грант М1Е000.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. В [5] показано, что автоморфизм $\bar{T}$ полной булевой алгебры есть произведение трех инволюций из полной группы $[\bar{T}]$. Положим $\bar{T} = E \times \{T_x\}$; тогда для некоторых $\bar{F}, \bar{G}, \bar{H} \in [\bar{T}]$ имеем

$$\bar{T} = \bar{H} \bar{G} \bar{F}, \quad \bar{F}^2 = \bar{G}^2 = \bar{H}^2 = E.$$

В силу определения полной группы траектории точек пространства $X \times Y$ под действием преобразования $\bar{T}$ являются инвариантными относительно преобразований $\bar{F}, \bar{G}, \bar{H} \in [\bar{T}]$. Так как множества вида $\{x\} \times Y$ инвариантны относительно $[\bar{T}]$, они будут инвариантными относительно $\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}$. Таким образом, требуемые измеримые семейства автоморфизмов получаются из представлений

$$\bar{F} = E \times \{F_x\}, \quad \bar{G} = E \times \{G_x\}, \quad \bar{H} = E \times \{H_x\}. \quad \square$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В эргодической теории известны конструкции автоморфизмов, не сопряженных своему обратному (см. [2–4]). Такие автоморфизмы не могут быть композициями двух инволюций. В связи с этим отметим, что в полной группе $[T]$ эргодический автоморфизм T и автоморфизм T^{-1} не сопряжены. Действительно, пусть $ST = T^{-1}S$ и каждая траектория $O_x = \{\dots, T^{-1}(x), x, T(x), \dots\}$ инвариантна относительно автоморфизма S . Тогда для каждой траектории O_x можно указать единственную точку $y(O_x) \in O_x$, такую, что $S(y(O_x)) = y(O_x)$ или $S(y(O_x)) = T(y(O_x))$. Это легко следует из того, что левый и правый сдвиги на $\mathbb{Z}$ может сопрягать только симметрия σ вида $\sigma(z) = a - z$. По построению множество $Y = \bigcup_{x \in X} \{y(O_x)\}$ измеримо. Но, с другой стороны, подобно множеству Витали, множество Y является неизмеримым. Если $\mu(Y) = 0$, то $\mu(X) = 0$, а $\mu(Y) > 0$ влечет за собой $\mu(X) = \infty$. Следовательно, T и T^{-1} не сопряжены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Ниже будет определено косое произведение $\tilde{R} = S \times \{\tilde{T}_x\}$, эквивалентное заданному R и некоторому $\bar{R} = S \times \{\tilde{P}_x\}$, $P_x^2 = E$. Так как автоморфизм S апериодичен, для некоторого множества $U \in \mathcal{B}$ выполнены условия $\mu(U) > 0$, $\mu(U \cap SU) = \mu(U \cap S^2U) = 0$. Положим $U_0 = U$ и определим по индукции $U_{k+1} = SU_k \setminus U_0$. Объединение всех U_k инвариантно относительно S ; поэтому в силу эргодичности автоморфизма S получим, что это объединение совпадает mod 0 с X . На множестве U_0 определим функцию возвращения $r(x)$:

$$r(x) = \min \{i > 0 : T^i(x) \in U_0, x \in U_0\}.$$

Положим $\Phi(x, n) = T_{S^{n-1}(x)} \cdots T_{S(x)} T_x$ и определим семейство автоморфизмов $\{\tilde{T}_x\}$ следующим образом:

$$\tilde{T}_x = \begin{cases} \Phi(x, r(x)), & x \in U_0, \\ E, & x \in X \setminus U_0. \end{cases}$$

Косые произведения $\tilde{R} = S \times \{\tilde{T}_x\}$ и R эквивалентны. Действительно, пусть

$$J_x^{-1} = \begin{cases} \Phi(x, r(T^{-k}(x)) - k), & x \in U_k, k > 0, \\ E, & x \in U_0. \end{cases}$$

Тогда выполнено (1). Пользуясь леммой, получаем $\tilde{T}_x = H_x G_x F_x$.

Определим семейство инволюций $\{P_x\}$, $x \in X$, следующим образом:

$$P_x = \begin{cases} F_x, & x \in U_0, \\ G_{S^{-1}(x)}, & x \in U_1, \\ H_{S^{-2}(x)}, & x \in U_2, \\ E, & \text{для остальных } x \in X. \end{cases}$$

Заметим, что косое произведение $\bar{R} = S \times \{P_x\}$ эквивалентно $\tilde{R}$. Действительно, если по $\bar{R}$ построить $\tilde{\bar{R}}$ (аналогично тому, как по R строилось $\tilde{R}$), то получим $\tilde{\bar{R}} = \tilde{R}$. Так как R эквивалентно $\tilde{R}$, по транзитивности получим эквивалентность косых произведений R и $\bar{R}$. $\square$

Автор благодарен В. И. Оселедцу, Б. М. Гуревичу и А. М. Степину за вопросы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вершик А. М., Корнфельд И. П., Синай Я. Г.* Общая эргодическая теория групп преобразований с инвариантной мерой. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники, Т. 2, ВИНТИ, М. (1985), с. 5–111.
2. *Оселедец В. И.* Функциональный анализ и его прил., **5**, вып. 3, 75–79 (1971).
3. *Anzai H.* Osaka Math. J., **3**, No. 1, 83–99 (1951).
4. *Малкин С. А.* Изв. вузов, Математика, № 6, 69–74 (1968).
5. *Рыжиков В. В.* Матем. заметки, **54**, вып. 2, 79–84 (1993).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
11 марта 1994 г.

УДК 517.986

Неунитарная часть тензорного произведения двух представлений группы $SO_0(n-1, 1)$, одно из которых унитарно в индефинитной метрике

© 1996. Ш. Ш. СУЛТАНОВ

Рассмотрим тензорное произведение $T_\nu \otimes T_\sigma = T$ представлений группы $SO_0(n-1, 1) = G$, где T_ν — представление основной серии, $\nu = (2-n+2i\rho)/2$, $\rho \in \mathbb{R}$, а T_σ унитарно в $\Pi_{r(m)}$ -метрике, $2-n-m < \sigma < 3-n-m$, $m \in \mathbb{N}$ (о представлениях, унитарных в индефинитной метрике, см. в [1]). Разложение тензорного квадрата представления дополнительной серии T_σ , $-1 < \sigma < 0$, $n = 3$, исследовано в [2], другие унитарные случаи для $n = 3$ рассмотрены в [3–5]. Значительно меньше известно о неунитарных тензорных произведениях представлений групп Ли. Некоторые тензорные произведения, унитарные в Π_∞ -метрике, изучены в работах [6–8].

Мы будем использовать обозначения из [9] (гл. X) с некоторыми упрощениями; например, вместо $T^{n,s}$ из [9] будем писать T_s . Для расширений представлений