Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. Ш. Султанов, Неунитарная часть тензорного произведения двух представлений группы $AO_0(n-1, 1)$, одно из которых унитарно в индефинитной метрике, *Функци. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 1, 86–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:10:49

Тогда выполнено (1). Пользуясь леммой, получаем $\tilde{T}_x = H_x G_x F_x$.

Определим семейство инволюций $\{P_x\}$, $x \in X$, следующим образом:

$$P_x = \begin{cases} F_x, & x \in U_0, \\ G_{S^{-1}(x)}, & x \in U_1, \\ H_{S^{-2}(x)}, & x \in U_2, \\ E, & \text{для остальных } x \in X. \end{cases}$$

Заметим, что косое произведение $\bar{R} = S \times \{P_x\}$ эквивалентно $\tilde{R}$. Действительно, если по $\bar{R}$ построить $\tilde{\bar{R}}$ (аналогично тому, как по R строилось $\tilde{R}$), то получим $\tilde{\bar{R}} = \tilde{R}$. Так как R эквивалентно $\tilde{R}$, по транзитивности получим эквивалентность косых произведений R и $\bar{R}$. $\square$

Автор благодарен В. И. Оселедцу, Б. М. Гуревичу и А. М. Степину за вопросы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вершик А. М., Корнфельд И. П., Синай Я. Г.* Общая эргодическая теория групп преобразований с инвариантной мерой. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники, Т. 2, ВИНТИ, М. (1985), с. 5–111.
2. *Оселедец В. И.* Функци. анализ и его прил., **5**, вып. 3, 75–79 (1971).
3. *Anzai H.* Osaka Math. J., **3**, No. 1, 83–99 (1951).
4. *Малкин С. А.* Изв. вузов, Математика, № 6, 69–74 (1968).
5. *Рыжиков В. В.* Матем. заметки, **54**, вып. 2, 79–84 (1993).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
11 марта 1994 г.

УДК 517.986

Неунитарная часть тензорного произведения двух представлений группы $SO_0(n-1, 1)$, одно из которых унитарно в индефинитной метрике

© 1996. Ш. Ш. СУЛТАНОВ

Рассмотрим тензорное произведение $T_\nu \otimes T_\sigma = T$ представлений группы $SO_0(n-1, 1) = G$, где T_ν — представление основной серии, $\nu = (2-n+2i\rho)/2$, $\rho \in \mathbb{R}$, а T_σ унитарно в $\Pi_{r(m)}$ -метрике, $2-n-m < \sigma < 3-n-m$, $m \in \mathbb{N}$ (о представлениях, унитарных в индефинитной метрике, см. в [1]). Разложение тензорного квадрата представления дополнительной серии T_σ , $-1 < \sigma < 0$, $n = 3$, исследовано в [2], другие унитарные случаи для $n = 3$ рассмотрены в [3–5]. Значительно меньше известно о неунитарных тензорных произведениях представлений групп Ли. Некоторые тензорные произведения, унитарные в Π_∞ -метрике, изучены в работах [6–8].

Мы будем использовать обозначения из [9] (гл. X) с некоторыми упрощениями; например, вместо $T^{n,s}$ из [9] будем писать T_s . Для расширений представлений

в пополнениях по соответствующим скалярным произведениям сохраним их обозначения.

Напомним описание неприводимых представлений T_s класса 1 группы G . Пусть D — пространство бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ на сфере $S^{n-2} = \{x = (x_1, \dots, x_{n-1}) : \sum x_k^2 = 1\}$.

Представления T_s при нецелых s неприводимы и действуют в D следующим образом:

$$T_s(g_{n-1}(\alpha))f(x) = (\operatorname{ch} \alpha - x_{n-1} \operatorname{sh} \alpha)^s \times f\left(\frac{x_1}{\operatorname{ch} \alpha - x_{n-1} \operatorname{sh} \alpha}, \dots, \frac{x_{n-2}}{\operatorname{ch} \alpha - x_{n-1} \operatorname{sh} \alpha}, \frac{x_{n-1} \operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - x_{n-1} \operatorname{sh} \alpha}\right),$$

где $g_{n-1}(\alpha)$ — гиперболическое вращение в плоскости (x_{n-1}, x_n) , а сужение представления на подгруппу $SO(n-1)$ совпадает с ее квазирегулярным представлением $SO(n-1)$ (см. [9, гл. IX]). Представление T_ν , $\nu = (2-n+2i\rho)/2$, унитарно в H_1 относительно

$$(f, f)_1 = \int_{S^{n-2}} f(x) \overline{f(x)} dx.$$

Представление T_ν , $2-n-m < \sigma < 3-n-m$, сохраняет индефинитное скалярное произведение

$$(f, f)_\sigma = C_\sigma \int_{S^{n-2}} \int_{S^{n-2}} (1 - [y, y'])^{2-n-\sigma} f(y) \overline{f(y')} dy dy', \quad (1)$$

$$C_\sigma = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\sigma)}{2^{\sigma-1} \Gamma((n-1)/2) \Gamma(\sigma - (n-2)/2)}, \quad [y, y'] = \sum_{k=1}^{n-1} y_k y'_k;$$

это равенство можно переписать в виде

$$(f, f)_\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (f_k, f_k)_1, \quad f_k \in \mathfrak{H}^{n-1,k}, \quad q_k = \frac{\Gamma(n+k+\sigma-2)}{\Gamma(k-\sigma)}, \quad (2)$$

где $\mathfrak{H}^{n-1,k}$ — пространство однородных гармонических многочленов степени k от $n-1$ переменных. Пополнение пространства D по дефинитному скалярному произведению

$$[f, f]_\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} |q_k| (f_k, f_k)_1$$

обозначим через H_σ . В нем действует расширение представления T_σ , и продолжение скалярного произведения $(f, f)_\sigma$ на H_σ задает $\Pi_{r(m)}$ -метрику в H_σ .

Учитывая, что $\dim \mathfrak{H}^{n-1,k} = h_k$, где

$$h_k = (2k+n-3)(k+n-4)!/k!(n-3)!,$$

и что число отрицательных q_k равно $[(m+1)/2]$ — целой части числа $(m+1)/2$, получаем из (2)

$$r(m) = \begin{cases} \sum_{k=0}^l h_{2k}, & m = 2l+1, \\ \sum_{k=1}^l h_{2k-1}, & m = 2l. \end{cases}$$

Тензорное произведение $T_l \otimes T_\sigma = T$ действует в пространстве $H_1 \otimes H_\sigma = H$, в котором естественным образом возникают индефинитное скалярное произведение (f, f) и дефинитное скалярное произведение $[f, f]$, и T унитарно в Π_∞ -метрике пространства H , определяемой скалярным произведением (f, f) .

Наша цель — выделение неунитарных неприводимых подпредставлений представления T .

Каждой функции $f \in D$ и каждому числу $\lambda \in \mathbb{C}$ поставим в соответствие функцию

$$\mathcal{L}_\lambda(f; x, y) = P(\lambda)(1 - [x, y])^{(2-n+2\lambda)/2} f(y),$$

$$P(\lambda) = \prod_{l=0}^t (\lambda + l), \quad t = \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor.$$

Используя (1) и неравенства $2 - n - m < \sigma < 3 - n - m$, легко показать, что $\mathcal{L}_\lambda(f; x, y) \in H$ при $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Вектор-функция $\mathcal{L}_\lambda(f; x, y)$ допускает аналитическое продолжение по λ на область $\operatorname{Re} \lambda > (n-2+\sigma)/2 > -m/2$ как вектор-функция $\mathcal{L}_\lambda(f)$ со значениями в H . Отображение $f \rightarrow \mathcal{L}_\lambda(f)$ непрерывно относительно C^∞ -топологии в D и нормы в H при $\operatorname{Re} \lambda > (n-2+\sigma)/2$.*

Пусть H_{ν_l} , $H_{\bar{\nu}_l}$, $l = 0, 1, 2, \dots, t$, — замкнутые линейные оболочки множеств $\{\mathcal{L}_{-l}(f)\}$, $\{\mathcal{L}_{-l+i\rho}(f)\}$ соответственно, где f пробегает D . Доказывая для любой функции $f \in D$ равенства

$$T(g)\mathcal{L}_{-l}(f) = \mathcal{L}_{-l}(T_{\nu_l}(g)f), \quad T(g)\mathcal{L}_{-l+i\rho}(f) = \mathcal{L}_{-l+i\rho}(T_{\bar{\nu}_l}(g)f),$$

$$\nu_l = (2 - n + 2i\rho + 2\sigma + 4l)/2, \quad \bar{\nu}_l = (2 - n - 2i\rho + 2\sigma + 4l)/2$$

и используя свойства неприводимых представлений T_s , приходим к такой теореме:

ТЕОРЕМА 2. *Подпространства H_{ν_l} , $H_{\bar{\nu}_l}$ инвариантны относительно T и обладают следующими свойствами:*

1. *Сужения представления T на H_{ν_l} , $H_{\bar{\nu}_l}$ эквивалентны (по Наймарку) неприводимым неунитарным представлениям T_{ν_l} , $T_{\bar{\nu}_l}$.*

2. *На подпространствах H_{ν_l} и $H_{\bar{\nu}_l}$ индефинитное скалярное произведение тождественно равно нулю, а на их замкнутой линейной оболочке $H_{\nu_l} + \overline{H_{\bar{\nu}_l}}$ оно не вырождается.*

3. *На H_+ -ортогональном относительно (f, f) дополнении к подпространству $\sum_{l=0}^t H_{\nu_l} + \overline{H_{\bar{\nu}_l}}$ в H скалярное произведение (f, f) строго положительно, и продолжение представления T/H_+ на пополнение пространства H_+ по $\sqrt{(f, f)}$ унитарно относительно (f, f) .*

При $\rho = 0$ неунитарная часть рассматриваемого тензорного произведения представляет собой ортогональную сумму неразложимых сцеплений двух (эквивалентных представлению $T_{((2-n+2\sigma+4l)/2)}$) неприводимых неунитарных представлений с самим собой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М. А., Исмагилов Р. С. Математический анализ. ВИНТИ, М. (1969), с. 73–105.
2. Молчанов В. Ф. Функци. анализ и его прил., **9**, вып. 4, 79–80 (1975).
3. Pukanszky L. Trans. Am. Math. Soc., **100**, No. 1, 116–152 (1961).
4. Ромм Б. Д. ДАН СССР, **153**, № 2, 276–277 (1963).
5. Repka J. Am. J. Math., **100**, № 4, 747–774 (1978).
6. Kostant B. J. Funct. Anal., **20**, № 4, 257–285 (1975).
7. Султанов Ш. Ш. Функци. анализ и его прил., **10**, № 2, 90–92 (1976).
8. Султанов Ш. Ш. Сиб. матем. ж., **29**, № 1, 179–191 (1988).
9. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. Наука, М. (1991).

Нижевартовский
педагогический институт

Поступило в редакцию
20 июня 1994 г.

УДК 514.76+517.972/.974

Геодезическое моделирование и условия разрешимости двухконцевой задачи для многозначных функционалов

© 1996. Е. И. ЯКОВЛЕВ¹

В заметке продолжаютс начатые в [1] исследования вариационной задачи с закрепленными концами для многозначных функционалов Новикова [2].

Пусть (M, g) — риманово многообразие, $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая и знакоопределенная функция, $k \in \mathbb{N}$, Φ — замкнутая 2-форма на M со значениями в $\mathbb{R}^k$ и $\theta \in \text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$. Предположим, что $\ker \theta \cap \mathbb{Q}^k = 0$ и множество интегралов от Φ по двумерным сферам многообразия M совпадает с $\mathbb{Z}^k$. Положим $F = \theta \circ \Phi$, $P = \theta(\mathbb{Z}^k)$ и рассмотрим точки $p, q \in M$, отрезок $I = [0, 1]$ и пространство Ω_{pq} кусочно-гладких путей в M с началом p и концом q . В каждом гомотопическом классе $\Delta \in \pi_0(\Omega_{pq})$ зафиксируем путь z_Δ . Если $x \in \Delta$, $\delta \in \mathbb{R}$ и $c: I^2 \rightarrow M$ — связывающая пути z_Δ и x кусочно-гладкая гомотопия, то положим $\Pi(x) = \int_c \Phi + \mathbb{Z}^k$, $x' = dx/d\tau$ и

$$S(\delta, x) = S_\delta(x) = \int_0^1 [g(x', x')/2 - \delta^2 u(x)] d\tau + \delta \theta(\Pi(x)).$$

Пусть x — экстремаль функционала $S_\delta: \Omega_{pq} \rightarrow \mathbb{R}/\delta P$. Тогда пару (δ, x) назовем экстремалью функционала $S: \mathbb{R} \times \Omega_{pq} \rightarrow \bigcup_{\delta \in \mathbb{R}} (\mathbb{R}/\delta P)$, причем нетривиальной, если $\delta \neq 0$. При $\delta > 0$ кривая $x_\delta(t) = x(t/\delta)$ является движением системы $\Gamma = (M, g, F, u)$ из положения p в положение q за время δ . Если $\delta < 0$, то $x_\delta(t)$ — движение Γ из q в p . Вообще говоря, мы не предполагаем положительной определенности римановой метрики g . Поэтому Γ можно интерпретировать и как натуральную механическую систему с гироскопическими силами, и как гироскопическую систему релятивистского типа. Ряд примеров

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 94-01-00492-а) и Международного научного фонда Дж. Сороса (грант NP4000).