Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Яковлев, Геодезическое моделирование и условия разрешимости двухконцевой задачи для многозначных функционалов, *Функци. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 1, 89–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa516>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 16:30:08

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М. А., Исмагилов Р. С. Математический анализ. ВИНТИ, М. (1969), с. 73–105.
2. Молчанов В. Ф. Функци. анализ и его прил., **9**, вып. 4, 79–80 (1975).
3. Pukanszky L. Trans. Am. Math. Soc., **100**, No. 1, 116–152 (1961).
4. Ромм Б. Д. ДАН СССР, **153**, № 2, 276–277 (1963).
5. Repka J. Am. J. Math., **100**, № 4, 747–774 (1978).
6. Kostant B. J. Funct. Anal., **20**, № 4, 257–285 (1975).
7. Султанов Ш. Ш. Функци. анализ и его прил., **10**, № 2, 90–92 (1976).
8. Султанов Ш. Ш. Сиб. матем. ж., **29**, № 1, 179–191 (1988).
9. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. Наука, М. (1991).

Нижевартовский
педагогический институт

Поступило в редакцию
20 июня 1994 г.

УДК 514.76+517.972/.974

Геодезическое моделирование и условия разрешимости двухконцевой задачи для многозначных функционалов

© 1996. Е. И. ЯКОВЛЕВ¹

В заметке продолжают начатые в [1] исследования вариационной задачи с закрепленными концами для многозначных функционалов Новикова [2].

Пусть (M, g) — риманово многообразие, $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая и знакоопределенная функция, $k \in \mathbb{N}$, Φ — замкнутая 2-форма на M со значениями в $\mathbb{R}^k$ и $\theta \in \text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$. Предположим, что $\ker \theta \cap \mathbb{Q}^k = 0$ и множество интегралов от Φ по двумерным сферам многообразия M совпадает с $\mathbb{Z}^k$. Положим $F = \theta \circ \Phi$, $P = \theta(\mathbb{Z}^k)$ и рассмотрим точки $p, q \in M$, отрезок $I = [0, 1]$ и пространство Ω_{pq} кусочно-гладких путей в M с началом p и концом q . В каждом гомотопическом классе $\Delta \in \pi_0(\Omega_{pq})$ зафиксируем путь z_Δ . Если $x \in \Delta$, $\delta \in \mathbb{R}$ и $c: I^2 \rightarrow M$ — связывающая пути z_Δ и x кусочно-гладкая гомотопия, то положим $\Pi(x) = \int_c \Phi + \mathbb{Z}^k$, $x' = dx/d\tau$ и

$$S(\delta, x) = S_\delta(x) = \int_0^1 [g(x', x')/2 - \delta^2 u(x)] d\tau + \delta \theta(\Pi(x)).$$

Пусть x — экстремаль функционала $S_\delta: \Omega_{pq} \rightarrow \mathbb{R}/\delta P$. Тогда пару (δ, x) назовем экстремалью функционала $S: \mathbb{R} \times \Omega_{pq} \rightarrow \bigcup_{\delta \in \mathbb{R}} (\mathbb{R}/\delta P)$, причем нетривиальной, если $\delta \neq 0$. При $\delta > 0$ кривая $x_\delta(t) = x(t/\delta)$ является движением системы $\Gamma = (M, g, F, u)$ из положения p в положение q за время δ . Если $\delta < 0$, то $x_\delta(t)$ — движение Γ из q в p . Вообще говоря, мы не предполагаем положительной определенности римановой метрики g . Поэтому Γ можно интерпретировать и как натуральную механическую систему с гироскопическими силами, и как гироскопическую систему релятивистского типа. Ряд примеров

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 94-01-00492-а) и Международного научного фонда Дж. Сороса (грант NP4000).

натуральных систем с многозначным действием рассмотрен в [2]. Ко второму типу относятся системы, описывающие движения заряженных пробных частиц в гравитационных и электромагнитных полях с магнитными монополями.

Пусть $\nu: M^* \rightarrow M$ — гладкое универсальное накрытие. Существует главное расслоение $\xi: \Xi \rightarrow M^*$ со структурной группой $T^k = U(1) \times \cdots \times U(1)$ и характеристическим классом $[\nu^*\Phi] \in H^2(M^*, \mathbb{R}^k)$. Положим $\mu = \nu \circ \xi$ и $G = T^k \times \pi_1(M)$. На Ξ определена G -связность с формой связности ω и формой кривизны $d\omega = \mu^*\Phi$. Рассмотрим канонический изоморфизм $j: \text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^k$ и число $\theta^2 = \theta(j(\theta))$. Положим $\mathbf{n} = (1/\theta^2)j(\theta)$ и $\gamma(r, s) = \theta^2(r^1s^1 + \cdots + r^ks^k)$ для $r, s \in \mathbb{R}^k$. Тогда формулы $u^* = u \circ \mu$, $\omega^* = (1/2u^*)\omega$,

$$\mathcal{H}(v) = \{X \in T_v\Xi \mid \omega(X) = \theta \circ \omega(X)\mathbf{n}\},$$

$$b(X, Y) = \gamma(\omega(X), \omega^*(Y)) + \mu^*g(X, Y),$$

где $v \in \Xi$ и $X, Y \in T_v\Xi$, определяют на Ξ G -инвариантное распределение $\mathcal{H}$ и риманову метрику b . Положим также $\alpha(r) = (\exp(2\pi i r^1), \dots, \exp(2\pi i r^k))$ для $r \in \mathbb{R}^k$ и $\Theta = \alpha(\ker \theta)$.

В [3] и [4] при более сильном, чем здесь, ограничении на F отмечалось, что касающиеся распределения $\mathcal{H}$ геодезические многообразия (Ξ, b) проектируются на траектории системы Γ . Но для получения содержательной информации о движениях гироскопических систем этого результата оказалось недостаточно. В настоящей работе существенную роль играет определяемое ниже риманово слоение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Подмногообразия $\mathcal{F}(v) = \{v \cdot a \mid a \in \Theta\}$, $v \in \Xi$, образуют на Ξ риманово слоение коразмерности $\dim M + 1$. При этом b — метрика Рейнхарта, а $\mathcal{H}$ — ортогональная слоям связность Эресмана для $\mathcal{F}$. При $k > 1$ последняя неинтегрируема.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для произвольных $x \in \Omega_{pq}$, $\delta \in \mathbb{R}$ и $v \in \mu^{-1}(p)$ существует единственный кусочно-гладкий путь $\bar{x}: I \rightarrow \Xi$, удовлетворяющий условиям $\mu \circ \bar{x} = x$, $\omega^*(d\bar{x}/d\tau) \equiv \delta \mathbf{n}$ и $\bar{x}(0) = v$. При этом формула $\lambda^v(\delta, x) = \bar{x}$ определяет инъективное отображение произведения $\mathbb{R} \times \Omega_{pq}$ в пространство $\Omega(v, G_q)$ кусочно-гладких путей в Ξ с началом v и концами в $G_q = \mu^{-1}(q)$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Геодезическая $\bar{x} \in \Omega(v, G_q)$ риманова многообразия (Ξ, b) принадлежит образу отображения λ^v тогда и только тогда, когда она ортогональна проходящему через точку $\bar{x}(1)$ слою слоения $\mathcal{F}$.*

Заметим, что при $k = 1$ слоение $\mathcal{F}$ и связность $\mathcal{H}$ вырождаются. Поэтому в [1] не было ни этих конструкций, ни каких-либо аналогов предложений 1 и 3. Определим функционалы $B: \Omega(v, G_q) \rightarrow \mathbb{R}$, $W: \mathbb{R} \times \Omega_{pq} \rightarrow \mathbb{R}/P$ и $E: \mathbb{R} \times \Omega_{pq} \rightarrow \mathbb{R}$ формулами

$$B(\bar{x}) = \int_0^1 b(\bar{x}', \bar{x}') d\tau, \quad W(\delta, x) = 2\delta \int_0^1 u(x) d\tau - \theta(\Pi(x)),$$

$$E(\delta, x) = S(\delta, x) + \delta W(\delta, x),$$

где $\bar{x}' = d\bar{x}/d\tau$. Пары (δ, x) и (σ, y) из $\mathbb{R} \times \Omega_{pq}$ назовем W -эквивалентными, если пути x и y гомотопны и $W(\delta, x) = W(\sigma, y)$. Для примера отметим, что

если система Γ описывает движения заряженной пробной частицы в постоянном магнитном поле, то $u \equiv 1/2$, $W(\delta, x) = \delta + f(x)$ и $E(\delta, x) = (\delta^2 + l(x)^2)/2$, где δ — время движения x_δ , $f(x)$ — поток магнитного поля через поверхность, ограниченную контуром $x - z_\Delta$, а $l(x)$ — длина пути x .

ТЕОРЕМА 1. *Рассмотрим точку $v \in \mu^{-1}(p)$ и класс эквивалентности $\Lambda \in \mathbb{R} \times \Omega_{pq}/W$. Тогда найдется такой слой L слоения $\mathcal{F}$, что для произвольной пары $(\delta, x) \in \mathbb{R} \times \Omega_{pq}$ и пути $\bar{x} = \lambda^v(\delta, x)$ включения $(\delta, x) \in \Lambda$ и $\bar{x}(1) \in L$ эквивалентны. При этом отображение λ^v устанавливает биективное соответствие между множеством принадлежащих W -классу Λ экстремалей функционала S и множеством всех экстремалей функционала $B: \Omega(v, L) \rightarrow \mathbb{R}$.*

В силу теоремы 1 задача с закрепленными концами для S сводится к задачам с фиксированным началом и, вообще говоря, подвижными концами для функционала B . Концевыми подмногообразиями являются слои слоения $\mathcal{F}$. При $k = 1$ они одноточечны; поэтому существование экстремалей функционала $B: \Omega(v, L) \rightarrow \mathbb{R}$ вытекает из теорем Хопфа–Ринова, Морса и Серра [1]. В случае когда $k > 1$, все обстоит иначе: слои слоения $\mathcal{F}$ некомпактны и каждый из них всюду плотен в содержащем его слое расслоения $\xi: \Xi \rightarrow M^*$, а следовательно, не является топологическим подпространством многообразия Ξ . В такой ситуации известные теоремы вариационного исчисления неприменимы. Тем не менее с помощью указанной редукции доказана

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $k > 1$, (M, g) — полное собственно риманово многообразие, $u > 0$, $\Delta \in \pi_0(\Omega_{pq})$, d_Δ — точная нижняя грань длин путей из Δ , K_Δ — множество принадлежащих классу Δ геодезических длины d_Δ , $V = T^k \setminus \alpha(\Pi(K_\Delta))$ и включение $i: V \rightarrow T^k$ индуцирует эпиморфизм $i_*: H_{k-1}(V) \rightarrow H_{k-1}(T^k)$. Тогда каждый класс W -эквивалентности $\Lambda \in R \times \Delta/W$ содержит такое множество нетривиальных экстремалей Λ_S функционала S , что значения функционала E на экстремалах из Λ_S всюду плотно заполняют некоторый интервал (e_Δ, e) , $e > e_\Delta = d_\Delta^2/2$.*

Гомоморфизм i_* из теоремы 2 заведомо сюръективен, если множество кратчайших K_Δ конечно и, в частности, если точки p и q не сопряжены на геодезических из класса Δ . Однако последнее вовсе не является необходимым. С другой стороны, обсуждаемое условие теоремы 2 может не выполняться при $\text{rank } H_1(K_\Delta) > 0$. Такие гомотопические классы существуют для некоторых пар точек на римановых многообразиях с достаточно большой группой изометрий [5, с. 128–147].

При $k = 1$ существование нетривиальных экстремалей функционала S гарантирует неравенство $V \neq \emptyset$ [1]. Это условие эквивалентно сюръективности гомоморфизма $i_*: H_0(V) \rightarrow H_0(T^1)$. Однако формулировка статьи [1] для прямого обобщения непригодна: имеются примеры, в которых $k \geq 2$, $V \neq \emptyset$, а функционал S имеет только тривиальные экстремали. Наконец, отметим, что в целом утверждение теоремы 2 при $k = 1$ неверно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яковлев Е. И. Функц. анализ и его прил., **24**, вып. 4, 63–73 (1990). 2. Новиков С. П. УМН, **37**, вып. 5, 3–49 (1982). 3. Шапиро Я. Л., Игошин В. А., Яковлев Е. И. Изв. вузов, сер. матем., № 2, 78–80 (1985). 4. Болотин С. В. Вестник МГУ, сер. матем.-мех., № 5, 51–53 (1986). 5. Милнор Дж. Теория Морса. Мир, М. (1965).

Нижегородский госуниверситет

Поступило в редакцию

2 августа 1993 г.

В переработанном виде

27 февраля 1995 г.

УДК 517.948

Сингулярный спектр в окрестности особой точки операторов модели Фридрихса

© 1996. С. И. ЯКОВЛЕВ¹

В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ задан самосопряженный оператор $\mathcal{L}$,

$$(\mathcal{L}u)(t) = t^2 u(t) + \int_{\mathbb{R}} v(t, x) u(x) dx, \quad u \in L_2(\mathbb{R}), \quad (1)$$

т.е. $\mathcal{L} = t^2 \cdot + V$, где $t^2 \cdot$ — оператор умножения на квадрат независимой переменной, а V (возмущение) — интегральный оператор с ядром $v(x, t)$, удовлетворяющим условию гладкости

$$v(t+h, t+h) + v(t, t) - v(t+h, t) - v(t, t+h) \leq \omega^2(|h|), \quad |h| \leq 1, \quad (2)$$

с функцией $\omega(t)$ (модулем непрерывности возмущения V), монотонной и удовлетворяющей условию Дини:

$$\omega(t) \downarrow 0 \quad \text{при} \quad t \downarrow 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty. \quad (3)$$

Предполагается, что оператор V неотрицательный и ядерный:

$$V \geq 0, \quad V \in \sigma_1. \quad (4)$$

При этом (2) можно рассматривать как условие гладкости на ядро $v_{1/2}(x, t)$ оператора $\sqrt{V}$, ибо левая часть выражения (2) тождественно переписывается [1] в следующем виде: $\int_{\mathbb{R}} |v_{1/2}(x+h, y) - v_{1/2}(x, y)|^2 dy$.

Изучим структуру $\sigma_{\text{sing}}(\mathcal{L})$ — сингулярного спектра оператора $\mathcal{L}$ — в зависимости от гладкости возмущения. Основное внимание уделим особой точке нуль,

¹Эта работа была поддержана Комиссией Европейского Сообщества в рамках сотрудничества ЕС–Россия (контракт ESPRIT P9282 ACTCS), а также Международным научным фондом (грант NSI000).