Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Яковлев, Сингулярный спектр в окрестности особой точки операторов модели Фридрихса, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 1, 92–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa517>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 18:02:59

ЛИТЕРАТУРА

1. Яковлев Е. И. Функц. анализ и его прил., **24**, вып. 4, 63–73 (1990). 2. Новиков С. П. УМН, **37**, вып. 5, 3–49 (1982). 3. Шапиро Я. Л., Игошин В. А., Яковлев Е. И. Изв. вузов, сер. матем., № 2, 78–80 (1985). 4. Болотин С. В. Вестник МГУ, сер. матем.-мех., № 5, 51–53 (1986). 5. Милнор Дж. Теория Морса. Мир, М. (1965).

Нижегородский госуниверситет

Поступило в редакцию

2 августа 1993 г.

В переработанном виде

27 февраля 1995 г.

УДК 517.948

Сингулярный спектр в окрестности особой точки операторов модели Фридрихса

© 1996. С. И. ЯКОВЛЕВ¹

В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ задан самосопряженный оператор $\mathcal{L}$,

$$(\mathcal{L}u)(t) = t^2 u(t) + \int_{\mathbb{R}} v(t, x) u(x) dx, \quad u \in L_2(\mathbb{R}), \quad (1)$$

т.е. $\mathcal{L} = t^2 \cdot + V$, где $t^2 \cdot$ — оператор умножения на квадрат независимой переменной, а V (возмущение) — интегральный оператор с ядром $v(x, t)$, удовлетворяющим условию гладкости

$$v(t+h, t+h) + v(t, t) - v(t+h, t) - v(t, t+h) \leq \omega^2(|h|), \quad |h| \leq 1, \quad (2)$$

с функцией $\omega(t)$ (модулем непрерывности возмущения V), монотонной и удовлетворяющей условию Дини:

$$\omega(t) \downarrow 0 \quad \text{при} \quad t \downarrow 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty. \quad (3)$$

Предполагается, что оператор V неотрицательный и ядерный:

$$V \geq 0, \quad V \in \sigma_1. \quad (4)$$

При этом (2) можно рассматривать как условие гладкости на ядро $v_{1/2}(x, t)$ оператора $\sqrt{V}$, ибо левая часть выражения (2) тождественно переписывается [1] в следующем виде: $\int_{\mathbb{R}} |v_{1/2}(x+h, y) - v_{1/2}(x, y)|^2 dy$.

Изучим структуру $\sigma_{\text{sing}}(\mathcal{L})$ — сингулярного спектра оператора $\mathcal{L}$ — в зависимости от гладкости возмущения. Основное внимание уделим особой точке нуль,

¹Эта работа была поддержана Комиссией Европейского Сообщества в рамках сотрудничества ЕС–Россия (контракт ESPRIT P9282 ACTCS), а также Международным научным фондом (грант NSI000).

так как можно показать, что после простой замены переменной $t^2 = x$ вне 0 спектральная ситуация изучается старым методом [1–7]. (Это объясняется тем, что указанная замена переменной вне любой окрестности точки нуль гладкая, результаты же работ [1–7], относящиеся к структуре сингулярного спектра слабых возмущений оператора умножения на независимую переменную, в существенном носят локальный характер.) Более того, в окрестности точки нуль поведение сингулярного спектра приобретает совершенно иной характер.

В работах [2, 3] показано, что для самосопряженного оператора модели Фридрихса $L := t \cdot + V$ (где $t \cdot$ — оператор умножения на независимую переменную, а оператор V удовлетворяет условиям (2)–(4)) существует точная граница конечности сингулярного спектра. А именно, если $\omega(t) = O(\sqrt{t})$ при $t \rightarrow 0$, то сингулярный спектр оператора L состоит не более чем из конечного числа собственных значений конечной кратности. Если же $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t)/\sqrt{t} = +\infty$, то строятся примеры, показывающие, что уже в случае возмущения V ранга 1 у оператора L могут появиться точки накопления собственных значений. Описание меры Лебега δ -окрестности появляющегося спектра в зависимости от $\omega(t)$ дано в [4–7].

В работе [8] показано, как можно использовать модель Фридрихса для изучения свойств спектра оператора Шрёдингера $(-\Delta + q)$. Связь между этими операторами осуществляется интегральным преобразованием Фурье. Аналогично с помощью ряда Фурье устанавливается связь между моделью Фридрихса и дискретным оператором Шрёдингера S [9, 10] на «вещественной оси». Оператор S равен $(U + U^*) + q$ и задан на пространстве H квадратично суммируемых комплексных последовательностей $u = \{u_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$; здесь U — оператор правого сдвига, U^* — его сопряженный, а $q = \{q_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, так что $(qu)_n = q_n u_n$ [9, 10]. При изоморфизме, устанавливаемом между H и $L_2(-\pi, \pi)$ отображением $\Phi^{-1}: u \rightarrow \tilde{u}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n e^{int}$ оператор S превращается в $\tilde{S}$: $\tilde{S}\tilde{u}(t) = 2 \cos(t) \tilde{u}(t) + \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{q}(t-x) \tilde{u}(x) dx$, где $\tilde{q}(t) = \sum_n q_n e^{int}$. Очевидно, что замена переменных $2 \cos t = x$ исследование $\sigma_{\text{sing}}(\tilde{S})$ сводила бы к изучению $\sigma_{\text{sing}}(L)$. Однако в окрестности точек $\pm\pi$ она не является гладкой, в связи с чем при таком переходе информация о тонких деталях структуры $\sigma_{\text{sing}}(\tilde{S})$ здесь может быть утрачена. Поэтому представляется разумным в качестве модели теории возмущений непрерывного спектра рассмотреть возмущения не оператора умножения на независимую переменную t , а оператора умножения на функцию t^2 .²

1. Ранг оператора возмущения V и условия конечности $\sigma_{\text{sing}}(\mathcal{L})$.

Для $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ определим оператор-функцию $M(z): E \rightarrow E := \overline{R(V)}$, $M(z) := I + \sqrt{V}(t^2 - z)^{-1}\sqrt{V}$, где $(t^2 - z)^{-1}$ — оператор умножения на соответствующую функцию в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *В комплексной плоскости с разрезом $[0, +\infty)$ аналитическая оператор-функция $M(z)$ при выполнении условий (2)–(4) непрерывно*

²Разумеется, имея представление о структуре множества $\sigma_{\text{sing}}(L)$, определенную информацию о строении множества $\sigma_{\text{sing}}(\mathcal{L})$ (в том числе и вблизи особой точки нуль) можно получить, сделав замену переменных, но эти результаты будут выражаться в неудобных терминах и окажутся недостаточно точными около точки нуль.

продолжается в ядерной норме на интервал $(0, +\infty)$ на верхнем и нижнем берегах разреза.

Для $\lambda > 0$ положим $M(\lambda) := M(\lambda + i0)$, и пусть $N := \{\lambda > 0 : \text{Ker}(M(\lambda)) \neq \emptyset\}$ — множество корней оператор-функции $M(\lambda)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если оператор V удовлетворяет условиям (2)–(4), то сингулярный спектр оператора $\mathcal{L}$, определяемого формулой (1), погружается в множество, получающееся добавлением к множеству N точки нуля, т. е. $\sigma_{\text{sing}}(\mathcal{L}) \subset N \cup \{0\}$.

Как мы видим, изучение $\sigma_{\text{sing}}(\mathcal{L})$ сводится к описанию множества корней N .

Нетрудно показать, что, если $V \geq 0$, точка нуля не может являться собственным значением оператора $\mathcal{L} = t^2 \cdot + V$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть возмущение V удовлетворяет условиям (2)–(4) с $\omega(t) = O(\sqrt{t})$, $t \rightarrow 0$, и $\text{rank } V < \infty$. Тогда точка нуля не является точкой сгущения корней оператор-функции $M(\lambda)$.

Таким образом, для возмущения конечного ранга границей конечности множества $\sigma_{\text{sing}}(\mathcal{L})$, как и для обычной модели Фридрихса, служит показатель гладкости возмущения $\sqrt{t}$. Но, как оказалось, в случае $\text{rank } V = \infty$ такая граница проходит через константу C в условии $\omega(t) = C\sqrt{t}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор V удовлетворяет условиям (2)–(4) с $\omega(t) = C\sqrt{t}$, $t \rightarrow 0$. Тогда, если $C \leq 1/\sqrt{\ln 4}$, точка нуля не является точкой сгущения корней оператор-функции $M(\lambda)$.

Следовательно, при выполнении условий теоремы 1 или 2 $\sigma_{\text{sing}}(\mathcal{L})$ состоит не более чем из конечного числа собственных значений конечной кратности. Точность теоремы 2 подтверждается теоремой 3.

ТЕОРЕМА 3. Для значения $C = 2/\sqrt{\ln 4}$ можно построить оператор V , $\text{rank } V = \infty$, удовлетворяющий условиям (2)–(4) с $\omega(t) = C\sqrt{t}$, такой, что точка нуля есть точка накопления собственных значений оператора $\mathcal{L} = t^2 \cdot + V$.

2. Структура сингулярного спектра в окрестности точки нуля.

Мы ограничиваемся случаем оператора ранга 1, т. е. ядро $v(x, y)$ имеет вид $\varphi(x)\overline{\varphi(y)}$, где $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ и $|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq \text{Const} \cdot t^\alpha$, $0 < \alpha < 1/2$; иначе говоря, φ принадлежит $L_2(\mathbb{R}) \cap \text{Lip } \alpha$, $\alpha \in (0, 1/2)$. На положительной полуоси для $\gamma > 1$ определим метрику ρ_γ :

$$\rho_\gamma(x, y) := \left| \int_x^y \frac{du}{u^\gamma} \right| \quad \text{при } x, y \in (0, +\infty). \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция φ принадлежит $L_2(\mathbb{R}) \cap \text{Lip } \alpha$, $\alpha \in (0, 1/2)$, а мера $\sigma(x) dx$ равна $dx/|x|^q$, $0 \leq q < 1$. Тогда для всех достаточно малых $\delta > 0$ имеет место следующее неравенство:

$$\sigma - \text{mes} \{y > 0 : \rho_{(1/2+\alpha)/2\alpha}(y, N) < \delta\} \leq C\delta^{2\alpha} \quad (6)$$

с константой C , зависящей только от показателя q .

Таким образом, σ -мера δ -окрестности по метрике ρ_γ при $\gamma = (1/2 + \alpha)/2\alpha$ множества корней N есть $O(\delta^{2\alpha})$, $\delta \rightarrow 0$. Очевидно, что оценка (6) налагает

некоторые ограничения на возможную структуру множества N , а значит, и на структуру $\sigma_{\text{sing}}(\mathcal{L}) \subset N \cup \{0\}$. Формулируемая ниже теорема 5 показывает, что в степенной шкале (6) дает точный результат около точки нуль (вне любой окрестности точки нуль оценка (6) дает ответ, совпадающий с результатом работы [4]).

ТЕОРЕМА 5. *Если функция φ принадлежит $L_2(\mathbb{R}) \cap \text{Lip } \alpha$, $\alpha \in (0, 1/2)$, и последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственных значений оператора $\mathcal{L} = t^2 \cdot + (\cdot, \varphi)\varphi$ степенным образом убывает к точке нуль, т. е. $\lambda_k = 1/k^\beta$, то из оценки (6) следует, что $\beta \geq 4\alpha/(1 - 2\alpha)$. В то же время для любых $\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0, 1/2)$ строится такая финитная функция $\varphi \in \text{Lip } \alpha$, что у оператора $\mathcal{L} = t^2 \cdot + (\cdot, \varphi)\varphi$ существует последовательность собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, убывающая к точке нуль и такая, что $\lambda_k = 1/k^\beta$ с $\beta = 4\alpha/(1 - 2\alpha) + \varepsilon$.*

Это означает, в частности, что при степенном характере убывания происходит удвоение показателя нижней границы возможной скорости накопления собственных значений оператора $\mathcal{L}$ к точке нуль по сравнению с ситуацией около других точек из $\sigma_{\text{sing}}(\mathcal{L})$.

В заключение автор благодарит профессора С. Н. Набоко за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Naboko S. N. Ark. Mat., **25**, No. 1, 115–140 (1987). 2. Набоко С. Н., Яковлев С. И. Функц. анализ и его прил., **24**, вып. 4, 88–89 (1990). 3. Дынькин Е. М., Набоко С. Н., Яковлев С. И. Алгебра и анализ, **3**, № 2, 77–90 (1991). 4. Павлов Б. С., Петрас С. В. Функц. анализ и его прил., **4**, вып. 2, 54–61 (1970). 5. Микитюк Я. В. ДАН СССР, **303**, № 1, 33–36 (1988). 6. Яковлев С. И. Вестник ЛГУ, сер. 1, № 1, 116–117 (1990). 7. Яковлев С. И. Депон. в ВИНТИ, № 2050-В от 17.05.91. 8. Фаддеев Л. Д. Тр. МИАН, **73**, 292–313 (1964). 9. Набоко С. Н., Яковлев С. И. Функц. анализ и его прил., **26**, вып. 2, 85–88 (1992). 10. Набоко С. Н., Яковлев С. И. Алгебра и анализ, **4**, № 3, 183–195 (1992).

Санкт-Петербургская академия
аэрокосмического приборостроения

Поступило в редакцию
15 сентября 1994 г.