Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Агранович, Б. А. Амосов, Оценки s -чисел
и спектральные асимптотики для интегральных
операторов типа потенциала на негладких по-
верхностях, *Функц. анализ и его прил.*, 1996,
том 30, выпуск 2, 1–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa518>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-
тельским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 05:18:43

УДК 517.98

Оценки s -чисел и спектральные асимптотики для интегральных операторов типа потенциала на негладких поверхностях

© 1996. М. С. Агранович, Б. А. Амосов¹

§1. Введение

Пусть S — замкнутая (т.е. компактная и без края) липшицева $(n-1)$ -мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что локально, после подходящего поворота системы координат в $\mathbb{R}^n$, эта поверхность является графиком функции, удовлетворяющей условию Липшица:

$$x_n = f(x') \quad (x' \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}), \quad |f(y') - f(x')| \leq L|y' - x'|, \quad (1.1)$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$. На S естественным образом определяется «площадь» — $(n-1)$ -мерная мера Лебега, индуцированная метрикой в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что в $\mathbb{R}^n$ или в содержащем S открытом множестве $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ задан полиоднородный, или классический, ПДО (псевдодифференциальный оператор) $\mathcal{A}$ порядка $m-1$, где $m < 0$. Известно, что такой оператор является интегральным и его ядро $K(x, y)$ — бесконечно гладкая при $x \neq y$ функция, имеющая слабую особенность при $x = y$ с определенным асимптотическим разложением при $|x - y| \rightarrow 0$ (см. [1] или обзор [2], п. 1.6). Сужая эту функцию на $S \times S$, введем интегральный оператор

$$Au(x) = \int_S \varphi(x) K(x, y) \psi(y) u(y) dS_y \quad (x \in S). \quad (1.2)$$

Здесь dS — элемент площади на S , $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ — измеримые функции на S с модулем, не превосходящим единицы, например, индикаторы (характеристические функции) измеримых множеств на S . Отсутствие края у S предполагается для упрощения изложения: наличие множителей φ и ψ по существу позволяет охватить случай, когда S имеет край. В §3 эти множители будут использованы при выводе спектральных асимптотик.

Ядром оператора (1.2) является произведение $\varphi(x)K(x, y)\psi(y)$, но нам будет удобно функцию $K(x, y)$ тоже называть ядром. Это ядро имеет слабую особенность на S (поскольку порядок оператора $\mathcal{A}$ не просто отрицателен, а меньше -1 ; см. [1] или [2]). Поэтому A — компактный оператор в пространстве $L^2(S)$ со скалярным произведением $(u, v) = \int_S u \cdot \bar{v} dS$. Напомним, что s -числа $s_j(T)$ компактного оператора T в гильбертовом пространстве H — это положительные собственные значения неотрицательного оператора $(TT^*)^{1/2}$ (или

¹Работа поддержана РФФИ, грант 95-01-00549, и ISF, грант N3H300.

$(T^*T)^{1/2}$, где T^* — оператор, сопряженный к T), занумерованные в порядке невозрастания с учетом кратностей.

Наша основная цель состоит в выводе оценки (напоминаем, что $m < 0$)

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} s_j(A) j^{-m/(n-1)} \leq Cd(\varphi, \psi), \quad (1.3)$$

где C не зависит от φ и ψ (см. теорему 2.9). Величина $d(\varphi, \psi)$ определяется в п. 2.1а. Она выражается через $(n-1)$ -мерные меры Лебега $m(\text{supp } \varphi)$ и $m(\text{supp } \psi)$ на S и мала, если мала хотя бы одна из этих мер. Носитель функции определяется обычным образом — как замыкание множества точек, в которых она отлична от 0. Точность показателя в (1.3) хорошо известна в случае гладкой поверхности S ; см. также §3.

Основной пример — оператор (1.2) типа потенциала простого слоя для эллиптического дифференциального уравнения с бесконечно гладкими коэффициентами в $\mathcal{O}$; в этом случае $K(x, y)$ — фундаментальное решение такого уравнения. Фактически мы получим оценку (1.3) для более общих ядер, в частности, с конечной гладкостью: см. теорему 2.9.

Наша вторая задача состоит в выводе асимптотической формулы для собственных значений оператора A в более специальном случае, когда липшицева поверхность S «почти гладкая» и A — самосопряженный оператор в $L^2(S)$ (см. теорему 3.2). Мы называем замкнутую $(n-1)$ -мерную липшицеву поверхность S почти гладкой, если она имеет структуру открытого бесконечно гладкого $(n-1)$ -мерного многообразия вне некоторого замкнутого «множества особенностей» S_0 с нулевой мерой Лебега $m(S_0)$ на S . В частности, почти гладкими являются поверхности конуса, цилиндра (например, с кругами в основаниях) и многогранника в $\mathbb{R}^3$, а также их образы при диффеоморфизмах. Конкретная геометрия такой поверхности не играет роли. Асимптотика имеет вид

$$\lambda_j^\pm(A) = b_\pm j^{m/(n-1)} + o(j^{m/(n-1)}) \quad (j \rightarrow \infty), \quad (1.4)$$

где $\lambda_j^\pm(A)$ — положительные и отрицательные собственные значения оператора A , занумерованные с учетом кратностей в порядке невозрастания модулей; постоянные $b_\pm$ обычным образом вычисляются через главный символ ПДО A на $S \setminus S_0$.

Для гладких поверхностей наши результаты близки к хорошо известным. Оценкам s -чисел и спектральным асимптотикам интегральных операторов посвящена обширная литература. Ближе всего к нашей работе цикл статей М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка, см. их обзор [3], в котором можно найти дальнейшие ссылки, и работы [4], а также работа Г. П. Костометова [5]. В них получены точные оценки s -чисел весьма общих интегральных операторов в областях n -мерного пространства и асимптотики собственных значений самосопряженных ПДО отрицательного порядка в таких областях.

Отметим также, что В. Я. Иврий рассмотрел в [6] самосопряженные ПДО отрицательного порядка на гладком замкнутом многообразии и получил для них асимптотики собственных значений с оценкой остатка и что А. А. Лаптев вывел в [7] из результатов, приведенных в [3], оценку s -чисел ПДО отрицательного порядка, действующего с S_1 в S_2 , где S_1 и S_2 — гладкие $(n-1)$ -мерные

многообразия в $\mathbb{R}^n$ с пересечением $S_1 \cap S_2$, имеющим нулевую $(n-1)$ -мерную меру Лебега.

Нам понадобятся некоторые результаты и приемы из работ Бирмана–Соломяка. Основная трудность в рассматриваемой нами ситуации, в отличие от рассмотренных в этих работах, состоит в том, что сужение ядра $K(x, y)$ на $S \times S$ почти не сохраняет гладкости при $x \neq y$, существенной в подходе Бирмана–Соломяка в случае, когда особенность у ядра достаточно слабая (а именно, при $m \leq -(n-1)/2$). Можно было бы пытаться преодолеть эту трудность, аппроксимируя липшицеву поверхность гладкими поверхностями (такие аппроксимации описаны в [8, 9]). Мы поступаем проще: аппроксимируем ядро $K(x, y)$ вырожденным ядром $K_N(x, y)$ вблизи $S \times S$, а затем сужаем на $S \times S$ оба ядра, K и K_N . Как и в [3], K_N строится при помощи кусочно-полиномиальных приближений к K ; но у нас они строятся явно и очень просто: с использованием тейлоровских многочленов по x или по y для исходного ядра в одинаковых «малых кубах». Такой упрощенный подход пригоден и для вывода оценок типа (1.3) для ПДО отрицательного порядка в ограниченной области евклидова пространства или на гладкой поверхности без выхода в объемлющее пространство (см. замечание 2.10).

Конечно, для приложений было бы удобнее иметь оценки s -чисел в случае ядер, определенных только на $S \times S$, и для негладких S . В этом направлении мы получим теорему 4.1 для случая $-(n-1)/2 < m < 0$. Она подсказана работой [5] об интегральных операторах в области пространства $\mathbb{R}^n$ (см. также ссылки в [5]). В доказательстве используется техника из [5] с некоторыми упрощениями. Независимо справедливость подобного результата заметил М. З. Соломяк.

Возможные приложения наших результатов относятся к спектральным задачам для эллиптических уравнений и систем 2-го порядка в областях с негладкими границами со спектральным параметром в граничном условии. В настоящей работе мы ограничимся примерами таких задач для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$ (см. п. 4.1). Непростую аналитическую основу для этих рассмотрений составляют результаты работ по граничным задачам для гармонических функций и свойствам соответствующих поверхностных потенциалов в случае липшицевой границы. Мы сошлемся на работы Верхоты [9], Костабеля [10] и Джерисона–Кенига [11], в которых можно найти дальнейшие ссылки.

В этой связи отметим еще следующий случай, в котором можно несколько обобщить теорему 3.2. Предположим, что некоторый оператор A , действующий в $L^2(S)$, допускает два представления:

$$A = T_1 A_1 = A_2 T_2, \quad (1.5)$$

где A_1 и A_2 — операторы вида (1.2), а T_1 и T_2 — ограниченные операторы в $L^2(S)$. Оценка s -чисел в этом случае тривиально получается из (1.3): например, $s_j(A) \leq \|T_1\| s_j(A_1)$. Но если S — почти гладкая поверхность и A — самосопряженный оператор в $L^2(S)$, сужение которого на гладкую часть $S \setminus S_0$ поверхности S есть ПДО отрицательного порядка, то мы можем получить и асимптотику собственных значений для A (см. п. 3.5). Такая ситуация возникает при рассмотрении «третьей краевой задачи» для эллиптических уравнений 2-го порядка со спектральным параметром в граничном условии (см. п. 4.1).

Авторы искренне благодарят М. З. Соломяка за полезные обсуждения.

§ 2. Оценки z -чисел

2.1. Нам понадобится следующая лемма о компактных операторах в гильбертовом пространстве, являющаяся простым следствием известной формулы

$$s_{j+1}(A) = \min_{\dim B \leq j} \|A - B\| \quad (2.1)$$

(см. [12, гл. II, п. 3]).

ЛЕММА 2.1. Пусть A_N ($N = 1, 2, \dots$) — последовательность конечномерных операторов, такая, что $\dim A_N \leq c_1 N^\nu$ и $\|A - A_N\| \leq c_2 N^{-\alpha}$ при достаточно больших N , где c_1, c_2, ν и α — положительные постоянные. Тогда

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} s_j(A) j^{\alpha/\nu} \leq c_2 c_1^{\alpha/\nu}. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для достаточно большого j найдется такое натуральное $N = N_j$, что $c_1 N_j^\nu < j \leq c_1 (N_j + 1)^\nu$. Тогда в силу (2.1)

$$s_{j+1}(A) \leq c_2 N_j^{-\alpha} \leq c_2 ((j/c_1)^{1/\nu} - 1)^{-\alpha},$$

что и приводит к (2.2). $\square$

Для (1.2) подходящие A_N мы определим явно в виде интегральных операторов

$$A_N u(x) = \int_S \varphi(x) K_N(x, y) \psi(y) u(y) dS_y \quad (x \in S) \quad (2.3)$$

с вырожденными ядрами K_N , которые сначала строятся в $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$.

Условимся под нормой $\|w\|$ ядра $w(x, y)$ интегрального оператора

$$Wu(x) = \int_S w(x, y) u(y) dy, \quad (2.4)$$

действующего в $L^2(S)$, понимать норму $\|W\|$ этого оператора.

Для простоты обозначений мы всюду дальше будем предполагать, что S содержится в единичном кубе $I^n = [0, 1]^n$ (в квадрате при $n = 2$). Рассмотрим равномерное разбиение этого куба в объединение N^n попарно не пересекающихся «малых кубов» $V^\alpha = [(\alpha_1 - 1)h, \alpha_1 h) \times \dots \times [(\alpha_N - 1)h, \alpha_N h)$ с ребром длины $h = 1/N$. Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\alpha_i = 1, \dots, N$. Нужные нам кусочно-полиномиальные по x аппроксимации K_N ядра K будут иметь вид

$$K_N(x, y) = \sum_{|\beta| \leq r} k_{\alpha, \beta}(y) x^\beta, \quad x \in V^\alpha, \quad y \in I^n, \quad (2.5)$$

где $k_{\alpha, \beta}(y)|_S \in L^2(S)$. Очевидно, что операторы A_N конечномерны.

2.1а. Пусть $q > -(n - 1)$. Введем класс $\mathcal{K}^q$ определенных в $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ ядер $K(x, y)$ со следующими свойствами: 1) существует последовательность $K_N(x, y)$ аппроксимаций вида (2.5) некоторой фиксированной степени r , такая, что на S

$$\|K - K_N\| = O(N^{-q-n+1}); \quad (2.6)$$

2) это же верно для ядра $\overline{K(y, x)}$. (Все функции пока считаются скалярными.) Ясно, что $\mathcal{K}^q$ — линейал и что при $q_1 > q_2$ справедливо включение $\mathcal{K}^{q_1} \subset \mathcal{K}^{q_2}$.

Для оценки размерности оператора (2.3) мы введем некоторые величины, связанные с подмножествами и функциями на S . Пусть сначала X — любое множество на S . Обозначим через $\nu(X, N)$ число малых кубов V^α со стороной $1/N$, имеющих непустое пересечение с X , и положим

$$\mu(X) = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{\nu(X, N)}{N^{n-1}}. \quad (2.7)$$

Ясно, что $\mu(X) \leq \mu(X')$ при $X \subset X'$; из приведенной ниже леммы 2.2 видно, что величина $\mu(S)$ конечна. Если $X = \text{supp } \varphi$, то вместо $\nu(\text{supp } \varphi, N)$ и $\mu(\text{supp } \varphi)$ мы будем писать соответственно $\nu_\varphi(N)$ и μ_φ .

ЛЕММА 2.2. *Для замкнутых подмножеств $X \subset S$ величина $\mu(X)$ и мера Лебега $m(X)$ на S эквивалентны, т. е.*

$$C_1 \leq \mu(X)/m(X) \leq C_2, \quad (2.8)$$

где C_1 и C_2 — положительные постоянные, не зависящие от X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть сначала X — замкнутое множество, лежащее в $(n-1)$ -мерном кубе $I^{n-1} = \{x \in I^n : x_n = 0\}$. В этом случае $\nu(X, N)/N^{n-1} = m(Q_N)$, где Q_N — объединение малых $(n-1)$ -мерных кубов $V^{\alpha'}$ со стороной $1/N$, имеющих общие точки с X . Обозначим через $O_\varepsilon(X)$ открытую ε -окрестность множества X на гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ ($\varepsilon > 0$). Ясно, что $X \subset Q_N \subset O_{\sqrt{n}/N}(X)$; поэтому

$$m(X) \leq m(Q_N) \leq m(O_{\sqrt{n}/N}(X)).$$

Так как множество X замкнуто, то оно совпадает с пересечением окрестностей $O_\varepsilon(X)$ по всем $\varepsilon > 0$, и $m(O_\varepsilon(X)) \rightarrow m(X)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу свойства непрерывности меры Лебега. Мы заключаем, что в данном случае $\mu(X) = m(X)$. Далее в доказательстве мы ограничимся грубыми оценками.

2) Пусть теперь X лежит на поверхности $\mathfrak{S} \subset I^n$, определяемой уравнением $x_n = f(x')$, где f — липшицева функция. Эта функция почти всюду дифференцируема (см., например, [13, п. 3.1.6]), и мера $m(X)$ выражается интегралом

$$m(X) = \int_{X_0} \sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2} dx',$$

где X_0 — проекция множества X на I^{n-1} , а ∇f — градиент функции f . Этот градиент ограничен, и мы видим, что $m(X_0) \leq m(X) \leq C_3 m(X_0)$, где C_3 — постоянная, так что меры $m(X)$ и $m(X_0)$ эквивалентны.

С другой стороны, рассмотрим малые n -мерные кубы V^α , имеющие общие точки с $\mathfrak{S}$ и лежащие в «вертикальном цилиндре», основание которого — малый $(n-1)$ -мерный куб $V^{\alpha'}$, лежащий в I^{n-1} . Поскольку функция f липшицева, число этих V^α ограничено некоторой постоянной C_4 . Мы видим, что $\mu(X_0) \leq \mu(X) \leq C_4 \mu(X_0)$, так что величины $\mu(X_0)$ и $\mu(X)$ также эквивалентны.

Как следствие получаем, что эквивалентны величины $\mu(X)$ и $m(X)$.

3) Теперь пусть X лежит на поверхности $\mathfrak{S}$, которая является образом рассмотренной в п. 2) поверхности при некотором повороте, $\mathfrak{S} \subset I^n$. Заметим, что если V — произвольно ориентированный n -мерный куб со стороной $1/N$, то

число малых кубов V^α разбиения I^n с той же стороной, имеющих общие точки с V , ограничено постоянной C_5 , не зависящей от N и ориентации куба V . Отсюда видно, что при произвольном повороте поверхности $\mathfrak{S}$ из п. 2) (или, что то же, при повороте системы координат в $\mathbb{R}^n$) величина $\mu(X)$ не может увеличиться более чем в C_5 раз и не может уменьшиться более чем в C_5 раз. Мера $m(X)$, конечно, не изменится. Значит, эквивалентность $\mu(X)$ и $m(X)$ сохраняется.

4) Наконец, пусть X — любое замкнутое подмножество на замкнутой липшицевой поверхности S , лежащей в I^n . Предположим, что мы можем представить X в виде объединения замкнутых подмножеств $X_1, \dots, X_K$, причем K не зависит от X , $m(X_i \cap X_j) = 0$ ($i \neq j$) и $C' \leq \mu(X_j)/m(X_j) \leq C''$, где C' и C'' — положительные постоянные, не зависящие от множества X и его разбиения на части X_j . Тогда

$$\begin{aligned}\mu(X) &\leq \mu(X_1) + \dots + \mu(X_K) \leq K\mu(X), \\ m(X) &= m(X_1) + \dots + m(X_K), \\ C' &\leq \frac{\mu(X_1) + \dots + \mu(X_K)}{m(X_1) + \dots + m(X_K)} \leq C'',\end{aligned}$$

и мы получаем, что $C'/K \leq \mu(X)/m(X) \leq C''$, т. е. приходим к цели.

Остается убедиться в возможности разбиения X на части X_j с нужными свойствами. Поверхность S допускает конечное покрытие системой связных открытых подмножеств O_j ($j = 1, \dots, K$), замыкание каждого из которых лежит на графике липшицевой функции, с $m(\partial O_j) = 0$ для всех j . Положим

$$U_1 = O_1, \quad U_2 = O_2 \setminus U_1, \quad \dots, \quad U_K = O_K \setminus \bigcup_{i=1}^{K-1} U_i. \quad (2.9)$$

Эти множества измеримы и попарно не пересекаются, их объединение есть S , замыкание $\overline{U_j}$ при каждом j лежит на графике липшицевой функции, и $m(\overline{U_j} \cap \overline{U_k}) = 0$ при $j \neq k$. Остается положить $X_j = \overline{X} \cap U_j$. $\square$

Отметим, что разбиение поверхности S на части U_j будет еще раз использовано в доказательстве теоремы 3.2.

ЗАМЕЧАНИЯ. Отметим, что предположение о замкнутости X в лемме существенно. Например, если X — счетное всюду плотное множество на S , то $m(X) = 0$ и $\mu(X) = \mu(S) = m(S)$. Но незамкнутые X нам не понадобятся. Отметим также, что величина $\mu(X)$, вообще говоря, не инвариантна относительно поворотов: в этом легко убедиться на примере отрезка $X = \mathfrak{S}$ при $n = 2$.

Положим $m_\varphi = m(\text{supp } \varphi)$,

$$\gamma = 1 + q/(n-1), \quad (2.10)$$

$$d(\varphi, \psi) = \min(m_\varphi^\gamma, m_\psi^\gamma), \quad (2.11)$$

$$d_1(\varphi, \psi) = \min(\mu_\varphi^\gamma, \mu_\psi^\gamma). \quad (2.12)$$

В силу леммы 2.2 величины $d(\varphi, \psi)$ и $d_1(\varphi, \psi)$ эквивалентны. Ниже удобнее пользоваться величиной $d_1(\varphi, \psi)$, но в окончательном результате мы заменим

ее величиной $d(\varphi, \psi)$, инвариантной относительно поворотов системы координат в $\mathbb{R}^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Для оператора (1.2) с $K \in K^q$ справедлива оценка

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} s_j(A) j^\gamma \leq C d_1(\varphi, \psi), \quad (2.13)$$

где постоянная C не зависит от φ и ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценивая размерность оператора (2.3), можно принять, что $K_N(x, y) \equiv 0$ при $x \in V^\alpha$, если $\text{supp } \varphi$ не пересекается с V^α . Поэтому

$$\dim A_N \leq C(n, r) \nu_\varphi(N) \leq 2C(n, r) \mu_\varphi N^{n-1}$$

при достаточно больших N , где $C(n, r)$ — размерность пространства многочленов порядка не выше r от n переменных. Кроме того, так как

$$\|A - A_N\| = \|\varphi(K - K_N)\psi\| \leq \|K - K_N\|,$$

то в силу (2.6) имеем $\|A - A_N\| \leq C_1 N^{-q-n+1}$, где C_1 не зависит от φ и ψ . Применяя лемму 2.1, получаем оценку

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} s_j(A) j^\gamma \leq C_1 (2C(n, r) \mu_\varphi)^\gamma.$$

Аналогичная оценка с μ_ψ вместо μ_φ получается, если вместо A рассмотреть имеющий те же s -числа сопряженный к A оператор

$$A^* u(x) = \int_S \overline{\psi(x) K(y, x) \varphi(y)} u(y) dS_y \quad (x \in S). \quad \square$$

2.1b. Для оценки нормы $\|A - A_N\|$ нам понадобится

ЛЕММА 2.4. Пусть ядро w оператора (2.4) удовлетворяет неравенству

$$|w(x, y)| \leq h(|x - y|) \quad (2.14)$$

при $x \neq y$, где функция $h(t)$ такова, что при некотором $\lambda \geq 0$ функция $t^{-\lambda} h(t)$ не возрастает на $(0, \sqrt{n})$. Тогда

$$\|w\| \leq C \int_0^{\sqrt{n}} t^{n-2} h(t) dt, \quad (2.15)$$

где постоянная C зависит только от поверхности S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу известного неравенства

$$\|w\|^2 = \|W\|^2 \leq \sup_x \int_S |w(x, y)| dS_y \cdot \sup_y \int_S |w(x, y)| dS_x \quad (2.16)$$

имеем

$$\|w\| \leq \sup_x \int_S h(|x - y|) dS_y. \quad (2.17)$$

Достаточно рассмотреть поверхность $\mathfrak{S}$, заданную в форме (1.1). Ясно, что в этом случае $|x' - y'| \leq |x - y| \leq \sqrt{1 + L^2} |x' - y'|$. Учитывая монотонность

$t^{-\lambda}h(t)$ и неравенство $\text{diam}(\mathfrak{S}) \leq \sqrt{n}$, получаем из (2.17), полагая $g(y') = \sqrt{1 + |\nabla f(y')|^2}$:

$$\begin{aligned} \|w\| &\leq \max_x \int_{\mathfrak{S}} |x - y|^{-\lambda} h(|x - y|) |x - y|^\lambda dS_y \\ &\leq \max_x \int_{\Omega} |x' - y'|^{-\lambda} h(|x' - y'|) (1 + L^2)^{\lambda/2} |x' - y'|^\lambda g(y') dy' \\ &\leq C_1 \int_{|y'| \leq \sqrt{n}} h(|y'|) dy' = C_2 \int_0^{\sqrt{n}} t^{n-2} h(t) dt. \quad \square \end{aligned}$$

2.2. Здесь мы рассмотрим некоторые нужные нам подклассы класса $\mathcal{K}^q$ и покажем, в частности, что в него входят ядра всех полиоднородных ПДО порядка $-q - n + 1$ в $\mathbb{R}^n$ или $\mathcal{O}$.

2.2а. Рассмотрим ядра $K(x, y) = L(x, y, x - y)$, где $L(x, y, z)$ — функция из $C^l(\overline{\mathcal{O}} \times \overline{\mathcal{O}} \times (\mathbb{R}^n \setminus 0))$, положительно однородная степени $q \in \mathbb{R}$ по переменной z , где $q > -n + 1$ и $l \in \mathbb{N}$. Класс таких ядер мы обозначим через $\mathcal{H}^{q,l}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. $\mathcal{H}^{q,l} \subset \mathcal{K}^p$, где

$$p = \begin{cases} q, & q < l - n + 1, \\ q - \varepsilon, & q = l - n + 1, \\ l - n + 1, & q > l - n + 1, \end{cases} \quad (2.18)$$

и ε — сколь угодно малое положительное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем обозначать через $\hat{x}$ центр куба $V^\alpha \ni x$, а сам этот куб V^α — через V_x . Так как $|x - \hat{x}| \leq \sqrt{n}/(2N)$, то

$$|x - y| \leq \sqrt{n}/N \implies |\hat{x} - \hat{y}| \leq 2\sqrt{n}/N, \quad (2.19a)$$

$$|x - y| > 3\sqrt{n}/N \implies |\hat{x} - \hat{y}| > 2\sqrt{n}/N \quad (2.19b)$$

и, как нетрудно проверить,

$$|\hat{x} - \hat{y}| > 2\sqrt{n}/N \implies 1/2 \leq |x - y|/|\hat{x} - \hat{y}| \leq 3/2. \quad (2.20)$$

Для ядра $K(x, y) = L(x, y, x - y)$ положим

$$K_N(x, y) = \begin{cases} 0, & |\hat{x} - \hat{y}| \leq 2\sqrt{n}/N, \\ T_{l-1}(x, y), & |\hat{x} - \hat{y}| > 2\sqrt{n}/N, \end{cases} \quad (2.21)$$

где $T_{l-1}(x, y)$ — многочлен Тейлора порядка $l - 1$ по переменной x с центром в точке $\hat{x}$ для функции $F(x) = L(x, y, x - y)$.

Не ограничивая общности, примем, что K — вещественнозначная функция. В силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа,

$$|K(x, y) - T_{l-1}(x, y)| \leq \sum_{|\beta|=l} C_\beta |\partial_x^\beta L(x, y, x - y)|_{x=\tilde{x}} (x - \hat{x})^\beta|,$$

где $\tilde{x} \in V_x$; поэтому при $|\hat{x} - \hat{y}| > 2\sqrt{n}/N$, используя (2.20), имеем

$$|K(x, y) - K_N(x, y)| \leq C_1 \sum_{j=0}^l |\tilde{x} - y|^{q-j} N^{-l} \leq C_2 |x - y|^{q-l} N^{-l}.$$

При $|\hat{x} - \hat{y}| \leq 2\sqrt{n}/N$, в силу однородности $L(x, y, z)$ по z ,

$$|K(x, y) - K_N(x, y)| = |K(x, y)| \leq C_3|x - y|^q.$$

Отсюда, используя импликации (2.19) и соотношение

$$t^{q-l}N^{-l} \asymp t^q \quad \text{при} \quad t \asymp 1/N \quad (2.22)$$

(где запись $f \asymp g$ означает, что f и g эквивалентны, т.е. дробь f/g заключена между положительными постоянными), получаем для погрешности аппроксимации оценку

$$|K(x, y) - K_N(x, y)| \leq h(|x - y|) \quad (2.23)$$

с функцией

$$h(t) = \begin{cases} C_4 t^{q-l} N^{-l}, & t > 1/N, \\ C_4 t^q, & t \leq 1/N, \end{cases}$$

где C_4 — достаточно большая постоянная, не зависящая от N .

Применяя лемму 2.4, получаем оценку

$$\|K - K_N\| \leq \begin{cases} C_5 N^{-q-n+1} + C_6 N^{-l}, & l \neq q + n - 1, \\ C_6 N^{-l} \ln N, & l = q + n - 1, \end{cases}$$

из которой вытекает нужный результат, так как $\overline{K(y, x)}$ входит в класс $\mathcal{H}^{q,l}$ вместе с $K(x, y)$. $\square$

2.2b. Рассмотрим ядра $K(x, y) = P(x, y, x - y) \ln|x - y|$, где $P(x, y, z)$ — однородный степени $q \in \mathbb{Z}_+$ многочлен по переменной z с коэффициентами из $C^l(\overline{\mathcal{O}} \times \overline{\mathcal{O}})$, $l \in \mathbb{N}$. Этот класс ядер обозначим через $\mathcal{H}_{\ln}^{q,l}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. $\mathcal{H}_{\ln}^{q,l} \subset \mathcal{K}^p$, где

$$p = \begin{cases} q, & q < l - n + 1, \\ l - n + 1 - \varepsilon, & q \geq l - n + 1, \end{cases} \quad (2.24)$$

и ε — сколь угодно малое положительное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$K_N(x, y) = \begin{cases} -Q_{l-1}(x, y) \ln N, & |\hat{x} - \hat{y}| \leq 2\sqrt{n}/N, \\ Q_{l-1}(x, y) T_{l-1}(x, y), & |\hat{x} - \hat{y}| > 2\sqrt{n}/N, \end{cases} \quad (2.25)$$

где $T_{l-1}(x, y)$ — многочлен Тейлора порядка $l - 1$ по переменной x с центром в точке $\hat{x}$ для функции $\ln|x - y|$, а $Q_{l-1}(x, y)$ — многочлен Тейлора порядка $l - 1$ по переменной x с центром в точке $\hat{x}$ для функции $P(x, y, x - y)$.

Не ограничивая общности, примем, что P имеет вещественные значения. В силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа,

$$|P(x, y, x - y) - Q_{l-1}(x, y)| \leq \sum_{|\beta|=l} C_\beta |\partial_x^\beta P(x, y, x - y)|_{x=\hat{x}} (x - \hat{x})^\beta|,$$

где $\tilde{x} \in V_x$. Отсюда получаем, что

$$|P(x, y, x - y) - Q_{l-1}(x, y)| \leq C_1 N^{-l}. \quad (2.26)$$

Поэтому при $|\hat{x} - \hat{y}| \leq 2\sqrt{n}/N$ имеем (используя на последнем шаге (2.19b))

$$\begin{aligned} |K(x, y) - K_N(x, y)| &= |P(x, y, x - y) \ln |x - y| + Q_{l-1}(x, y) \ln N| \\ &\leq |Q_{l-1}(x, y) - P(x, y, x - y)| \ln N + |P(x, y, x - y)(\ln |x - y| + \ln N)| \\ &\leq C_1 N^{-l} \ln N + |P(x, y, x - y) \ln(|x - y|N)| \\ &\leq C_1 N^{-l} \ln N + C_2 |x - y|^q \left(\ln \frac{3\sqrt{n}}{|x - y|N} + 1 \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Снова в силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа,

$$|\ln |x - y| - T_{l-1}(x, y)| \leq \sum_{|\beta|=l} C_\beta |\partial_x^\beta \ln |x - y||_{x=\tilde{x}} (x - \hat{x})^\beta|,$$

где $\tilde{x} \in V_x$. Поэтому при $|\hat{x} - \hat{y}| > 2\sqrt{n}/N$, используя (2.20), имеем

$$|\ln |x - y| - T_{l-1}(x, y)| \leq C_3 |\tilde{x} - y|^{-l} N^{-l} \leq C_4 |x - y|^{-l} N^{-l}, \quad (2.28)$$

откуда, в частности, следует (с учетом (2.19a)), что

$$|T_{l-1}(x, y)| \leq C_4 |x - y|^{-l} N^{-l} + |\ln |x - y|| \leq C_5 + \ln N. \quad (2.29)$$

Используя оценки (2.26), (2.29), (2.28) и однородность P , получаем следующую оценку при $|\hat{x} - \hat{y}| > 2\sqrt{n}/N$:

$$\begin{aligned} |K(x, y) - K_N(x, y)| &= |P(x, y, x - y) \ln |x - y| - Q_{l-1}(x, y) T_{l-1}(x, y)| \\ &\leq |(P(x, y, x - y) - Q_{l-1}(x, y)) T_{l-1}(x, y)| \\ &\quad + |P(x, y, x - y)(\ln |x - y| - T_{l-1}(x, y))| \\ &\leq C_1 N^{-l} (C_5 + \ln N) + C_6 |x - y|^{q-l} N^{-l}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Используя импликации (2.19) и соотношение (2.22), получаем для погрешности аппроксимации из неравенств (2.30) и (2.27) оценку (2.23) с функцией

$$h(t) = C_7 N^{-l} \ln N + \begin{cases} C_7 t^{q-l} N^{-l}, & t > 1/N, \\ C_7 t^q (1 - \ln(tN)), & t \leq 1/N, \end{cases}$$

где C_7 — достаточно большая постоянная, не зависящая от N .

Применяя лемму 2.4, получаем оценку

$$\|A - A_N\| \leq C_8 N^{-l} \ln N + C_8 N^{-q-n+1},$$

из которой вытекает нужный результат, так как $\overline{K(y, x)}$ содержится в классе $\mathcal{H}_{\ln}^{q,l}$ вместе с $K(x, y)$. $\square$

2.2с. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть $K(x, y) \in C^l(\overline{\mathcal{O}} \times \overline{\mathcal{O}})$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда $K(x, y) \in \mathcal{K}^q$, где $q = l - n + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве аппроксимации $K_N(x, y)$ возьмем многочлен Тейлора $T_{l-1}(x, y)$ порядка $l - 1$ по переменной x для функции $K(x, y)$ с центром в точке $\hat{x}$. Предположив функцию K вещественнозначной, при помощи

формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получаем

$$|K(x, y) - T_{l-1}(x, y)| \leq C_1 \sum_{|\beta|=l} \max |\partial_x^\beta K(x, y)| \cdot |(x - \hat{x})^\beta|$$

(где C_1 не зависит от K); поэтому $|K(x, y) - K_N(x, y)| \leq C_2 N^{-l}$. Применяя лемму 2.4, получаем

$$\|A - A_N\| \leq C_2 N^{-l} \int_0^{\sqrt{n}} t^{n-2} dt = C_3 N^{-l}. \quad \square$$

2.2d. Пусть $q > -n + 1$ и $l = [q] + n$. Рассмотрим ядро $K(x, y)$ вида

$$K(x, y) = \sum_{j=0}^k K_{q_j}(x, y) + L(x, y), \quad (2.31)$$

где $q = q_0 < q_1 < \dots < q_k$; $K_{q_j}(x, y) \in \mathcal{H}^{q_j, l}$, если $q_j \notin \mathbb{Z}_+$, и $K_{q_j}(x, y) \in \mathcal{H}^{q_j, l} + \mathcal{H}_{\text{lin}}^{q_j, l}$ (т.е. K_{q_j} — сумма ядер из этих двух классов), если $q_j \in \mathbb{Z}_+$; $L(x, y) \in C^l(\overline{\mathcal{O}} \times \overline{\mathcal{O}})$. Класс ядер вида (2.31) мы будем обозначать через $\mathcal{P}^q$.

В этот класс входят ядра всех полиоднородных ПДО порядка $m - 1 = -q - n$ в $\mathbb{R}^n$ (см. [1] или [2]). Из предложений 2.5–2.7 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. $\mathcal{P}^q \subset \mathcal{K}^q$.

Сформулируем основной результат этого параграфа, вытекающий из предложений 2.3 и 2.7, в виде следующей теоремы. Напомним, что величина $d(\varphi, \psi)$ определена в (2.11).

ТЕОРЕМА 2.9. Пусть $K(x, y) \in \mathcal{P}^q$. Тогда s -числа оператора (1.2) удовлетворяют неравенству

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} s_j(A) j^{1+q/(n-1)} \leq C d(\varphi, \psi). \quad (2.32)$$

Оценка (2.32) совпадает с (1.3). Этот результат без труда переносится на матричные операторы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.10. Если S — область в $\mathbb{R}^{n-1}$ или $(n-1)$ -мерная бесконечно гладкая замкнутая поверхность, то оценка вида (2.32) справедлива для операторов с ядрами, заданными только на $S \times S$. В этом случае аппроксимации ядер строятся теми же способами в пределах $S \times S$. Мы не будем на этом останавливаться. Ср. [3, 4].

§3. Асимптотика собственных значений самосопряженных ПДО отрицательного порядка на почти гладкой поверхности

3.1. В этом параграфе мы наложим более жесткие условия на оператор A и поверхность S . Поверхность S будем считать почти гладкой в следующем смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Замкнутую липшицеву $(n-1)$ -мерную поверхность S в $\mathbb{R}^n$ назовем *почти гладкой*, если вне некоторого замкнутого подмножества

S_0 с $m(S_0) = \mu(S_0) = 0$ она имеет структуру открытого бесконечно гладкого $(n-1)$ -мерного подмногообразия в $\mathbb{R}^n$.

Это условие можно понимать следующим образом. В любом локальном представлении (1.1) поверхности S в виде графика липшицевой функции эта функция принадлежит C^∞ вне некоторого подмножества в Ω , замыкание которого имеет нулевую $(n-1)$ -мерную меру. Отметим, что множество $S_1 = S \setminus S_0$ может быть несвязным. Множество S_0 назовем *множеством особенностей* поверхности S .

Как мы уже отмечали, поверхности конуса и цилиндра с круговыми основаниями и многогранника в $\mathbb{R}^3$ — примеры почти гладких поверхностей; в первом случае S_0 состоит из вершины и всех точек края основания, в третьем — из всех точек ребер многогранника. Нетрудно построить почти гладкий «многогранник» в $\mathbb{R}^3$ со счетным множеством граней.

Оператор A в открытом множестве $\mathcal{O} \supset S$ мы теперь будем считать полиоднородным матричным ПДО порядка $m-1$, $m < 0$; в частности, он будет иметь ядро $K(x, y)$, бесконечно гладкое при $x \neq y$. Пусть интегральный оператор A_0 на S имеет ядро, являющееся сужением ядра $K(x, y)$ на $S \times S$. В $O'(x_0)$ для любой точки $x_0 \in S_1$ это полиоднородный ПДО (например, в том смысле, что если α, β — функции из $C_0^\infty(O'(x_0))$, то $\alpha A_0(\beta \cdot)$ — полиоднородный ПДО в $O'(x_0)$ порядка $m < 0$. Обозначим через $a_0(x', \xi')$ главный символ этого ПДО A_0 ; ниже в предложении 3.5 мы выразим его через главный символ ПДО A .

Введем функции распределения собственных чисел компактного оператора T в гильбертовом пространстве H . Через $N_+(t, T)$ и $N_-(t, T)$, где $t > 0$, обозначим число собственных значений этого оператора, больших t и меньших $-t$ соответственно; при этом собственные значения подсчитываются с учетом их кратностей. Аналогичным образом определим величины $n_+(t, a)$ и $n_-(t, a)$ для квадратной числовой матрицы a .

Теперь мы можем сформулировать основную теорему в настоящем параграфе.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть φ — ограниченная измеримая функция на почти гладкой липшицевой поверхности S , и пусть $A = \varphi A_0(\bar{\varphi} \cdot)$ — самосопряженный оператор в $L^2(S)$. Тогда

$$N_\pm(t, A) = c_\pm t^{\frac{n-1}{m}} + o(t^{\frac{n-1}{m}}) \quad \text{при } t \rightarrow 0, \quad (3.1)$$

где

$$c_\pm = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \iint_{T^*S_1} n_\pm(1, |\varphi(x')|^2 a_0(x', \xi')) dx' d\xi'. \quad (3.2)$$

3.2. В доказательстве будут использованы два следующих результата, принадлежащих М. Ш. Бирману и М. З. Соломяку (см. [4] и [14]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть A_0 — полиоднородный ПДО порядка $m < 0$ в ограниченной области O' пространства $\mathbb{R}^{n-1}$, и пусть $\varphi(x')$ — ограниченная измеримая функция с носителем, лежащим в O' . Предположим, что $A = \varphi A_0(\bar{\varphi} \cdot)$ — самосопряженный оператор в $L^2(O')$. Тогда справедливы формулы (3.1)–(3.2) с заменой S_1 на O' .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть T — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H , и пусть при некотором $\sigma > 0$ для

любого $\varepsilon > 0$ оператор T представим в виде суммы $T'_\varepsilon + T''_\varepsilon$ компактных самосопряженных операторов, таких, что существуют конечные пределы

$$\lim_{t \rightarrow 0} N_\pm(t, T'_\varepsilon) t^\sigma = c_\pm(T'_\varepsilon) \quad (3.3)$$

и

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} s_j(T''_\varepsilon) j^{1/\sigma} \leq \varepsilon. \quad (3.4)$$

Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ величины $c_\pm(T'_\varepsilon)$ стремятся к конечным пределам $c_\pm$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0} N_\pm(t, T) t^\sigma = c_\pm. \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Воспользуемся разбиением поверхности S на части (2.9). Положим

$$S'_0 = S_0 \cup \partial U_1 \cup \dots \cup \partial U_K.$$

Это замкнутое подмножество на S нулевой меры. Обозначим через S'_δ его открытую δ -окрестность. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta > 0$, что $m(S'_\delta) < \varepsilon$. Зафиксируем δ и положим

$$S' = S'_\delta, \quad S'' = S \setminus S' \quad \text{и} \quad D_j = U_j \setminus S' \quad (j = 1, \dots, K).$$

Множества D_j замкнуты, попарно не пересекаются и вместе составляют S'' .

Обозначим через φ_k индикатор множества D_k ($k = 1, \dots, p$) и через φ_0 индикатор множества S' . Мы имеем

$$A = A' + A'', \quad \text{где} \quad A' = \sum_1^p \varphi_k A(\varphi_k \cdot) \quad \text{и} \quad A'' = \sum'_{l,k} \varphi_k A(\varphi_l \cdot); \quad (3.6)$$

в последней сумме в каждом слагаемом либо $k \geq 1$, $l \geq 1$ и $k \neq l$, либо l и/или k равно 0. Так как носители функций φ_k ($k \geq 1$) не пересекаются, то

$$N_\pm(t, A') = \sum_1^p N_\pm(t, \varphi_k A(\varphi_k \cdot)),$$

где к каждому слагаемому применимо предложение 3.3. Значит, эта сумма имеет вид (3.1), где $c_\pm$ — суммы соответствующих интегралов по T^*D_k . Очевидно, что эти суммы стремятся к (3.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теперь оценим s -числа оператора A'' . В силу теоремы 2.9 при больших j

$$s_j \left(\varphi_0 A \left(\sum_0^p \varphi_k \cdot \right) \right) \leq C \varepsilon j^{\frac{m}{n-1}} \quad \text{и} \quad s_j \left(\sum_1^p \varphi_k A \left(\varphi_0 \cdot \right) \right) \leq C \varepsilon j^{\frac{m}{n-1}},$$

где C — постоянная, не зависящая от ε и j . В остальных слагаемых носители функций φ_k и φ_l не пересекаются, так что это произведения ограниченных операторов и интегрального оператора с бесконечно гладким ядром. Поэтому s -числа этих слагаемых быстро убывают, и то же верно для их суммы, так как для любых двух компактных операторов T_1 и T_2

$$s_{j+k-1}(T_1 + T_2) \leq s_j(T_1) + s_k(T_2) \quad (3.7)$$

(см. [12, гл. II]). Мы заключаем, что $\overline{\lim} s_j(A'') j^{-m/(n-1)} \leq C' \varepsilon$, где постоянная C' не зависит от ε . Остается применить предложение 3.4. $\square$

ЗАМЕЧАНИЯ. Как частный случай теорема 3.2 содержит аналог предложения 3.3 Бирмана–Соломыка для ПДО на гладком замкнутом многообразии. В этом случае теорема 3.2 легко выводится из результатов в [4] и без предположения, что A_0 получается из A сужением ядра на $S \times S$. Мы тоже могли бы в этом случае обойтись без этого предположения с учетом замечания 2.10.

В [4] ядра и символы предполагались имеющими некоторую конечную гладкость; поэтому и теорема 3.2 допускает ослабление предположений о гладкости.

3.4. Укажем формулу для вычисления главного символа ПДО A_0 через главный символ ПДО $\mathcal{A}$. Рассмотрим окрестность $O(x_0)$ из определения 3.1 и перейдем в ней к координатам (x', y_n) , где $y_n = x_n - f(x')$, но для единообразия переобозначим y_n заново через x_n . Пусть $\alpha(x, \xi)$ — главный символ ПДО $\mathcal{A}$ в этих координатах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. При $\xi' \neq 0$

$$a_0(x', \xi') = \frac{1}{2\pi} \int \alpha_0(x', 0, \xi', \xi_n) d\xi_n. \quad (3.8)$$

Это сходящийся интеграл, так как

$$|\alpha_0(x, \xi)| \leq C_1 |\xi|^{m-1}. \quad (3.9)$$

Для доказательства предложения 3.5 можно умножить $\mathcal{A}$ слева и справа на финитную бесконечно гладкую функцию с носителем в $O(x_0)$, равную 1 вблизи рассматриваемой точки. Это не отражается на главном символе. Продолжая теперь ядро нулем вне $O(x_0) \times O(x_0)$, можно принять, что $\mathcal{A}$ — ПДО в $\mathbb{R}^n$. Перепишем его ядро $K(x, y)$ в виде $K_1(x, x - y)$. Теперь полный символ $\alpha(x, \xi)$ ПДО $\mathcal{A}$ вычисляется по известной формуле (см., например, [2, п. 1.2])

$$\alpha(x, \xi) = \int e^{i(x-y) \cdot \xi} K_1(x, x - y) dy = \int e^{iz \cdot \xi} K_1(x, z) dz.$$

Аналогично полный символ $a(x', \xi')$ ПДО A_0 , рассматриваемого как ПДО в $\mathbb{R}^{n-1}$, вычисляется по формуле

$$a(x', \xi') = \int e^{iz' \cdot \xi'} K_1(x', 0, z', 0) dz'.$$

Из этих двух формул видно, что

$$a(x', \xi') = \frac{1}{2\pi} \int \alpha(x', 0, \xi) d\xi_n. \quad (3.10)$$

Это аналог формулы (3.8) для локальных полных символов. Подставив сюда

$$\alpha(x', 0, \xi) = \alpha_0(x', 0, \xi) + O(|\xi|^{m-2}) \quad (\xi \rightarrow \infty),$$

получим

$$a(x', \xi') = \frac{1}{2\pi} \int \alpha_0(x', 0, \xi) d\xi_n + O(|\xi|^{m-1}) \quad (\xi \rightarrow \infty),$$

что и дает (3.8). $\square$

3.5. Здесь мы поясним сказанное в конце введения об операторах с двойным представлением (1.5). В этом случае единственная поправка к доказательству соответствующего обобщения теоремы 3.2 состоит в следующем. Рассмотрим оператор $\varphi_k A \varphi_l$. Если нам важно, что μ_{φ_k} мало, то надо использовать второе из представлений (1.5) оператора A , а если важно, что мало μ_{φ_l} , то первое.

§4. Примеры приложений к спектральным граничным задачам. Вторая теорема об s -числах

4.1. Здесь мы рассмотрим примеры, связанные с уравнением Лапласа $\Delta u = 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus S$, где S — общая граница ограниченной области G_+ и неограниченной области G_- . В качестве $K(x, y)$ возьмем стандартное фундаментальное решение $-1/(4\pi|x - y|)$. Пусть $\varphi(x) \equiv 1$ и $\psi(y) \equiv 1$. Сказанное о свойствах потенциалов дальше в этом пункте допускает элементарную проверку в случае бесконечно гладкой поверхности S (ср. [15, §§36–37]). На случай липшицевой S все переносится на основе результатов, полученных или приведенных в [9–11]. Более общие утверждения детально проверены в [16] для уравнения Гельмгольца, где обсуждаются спектральные свойства соответствующих несамосопряженных операторов.

Оператор A является самосопряженным и отрицательным. Оценка (2.2) принимает вид $|\lambda_j(A)| \leq Cj^{-1/2}$, а формула (1.4) в случае почти гладкой поверхности — вид $\lambda_j(A) = -cj^{-1/2} + o(j^{-1/2})$, где $c = 4\sqrt{\pi/|S|}$ и $|S|$ — площадь поверхности S . Нетрудно указать граничную задачу для гармонических функций, эквивалентную уравнению $A\varphi = \lambda\varphi$. Пусть ν — единичная внешняя нормаль к S (она существует на S почти всюду); значками $^+$ и $^-$ условимся обозначать предельные граничные значения функций из G_+ и G_- (по «регулярным» конусам $\Gamma_{\pm}(x) \subset G_{\pm}$ с вершиной в $x \in S$ для почти всех $x \in S$; см. [9]). Задача имеет вид

$$\Delta u = 0 \quad \text{вне } S, \quad u^+ = u^- \quad \text{и} \quad \lambda \left[\frac{\partial u^-}{\partial \nu} - \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \right] = u^{\pm} \quad \text{на } S, \quad (4.1)$$

при этом u подчиняется условию $u(x) = O(r^{-1})$ при $|x| = r \rightarrow \infty$. Функции u и φ связаны соотношениями

$$\varphi = \frac{\partial u^-}{\partial \nu} - \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \quad \text{и} \quad u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\varphi(y)}{|x - y|} dy \quad (x \notin S). \quad (4.2)$$

При этом $\varphi \in H_1(S)$, $u \in H_{3/2}(G_+) \cap C^\infty(G_+)$ и $u \in H_{3/2, \text{loc}}(G_-) \cap C^\infty(G_-)$, где H_s — соболевские L^2 -пространства (ср. [11]).

Остановимся еще на задаче

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } G, \quad -u^+ = \lambda \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \quad \text{на } S. \quad (4.3)$$

Эта задача приводится к уравнению $T_+ \varphi = \lambda \varphi$, где $\varphi = \partial u^+ / \partial \nu$; u выражается через φ второй формулой в (4.2), и

$$T_+ = (\tfrac{1}{2}I - B)^{-1} A = A(\tfrac{1}{2}I - B')^{-1}. \quad (4.4)$$

Через B здесь обозначается прямое значение потенциала двойного слоя

$$B\varphi(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|} \varphi(y) dS_y \quad (x \in S). \quad (4.5)$$

На гладкой поверхности S это интегральный оператор со слабой особенностью и поэтому компактный оператор в $L^2(S)$. На липшицевой поверхности он определен в общем случае лишь в смысле главного значения, т. е. как предел интеграла по $\{y \in S : |x-y| > \varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, в смысле сходимости почти всюду в $L^2(S)$ (см. ссылки в [9]), и это, вообще говоря, лишь ограниченный оператор в $L^2(S)$. Через B' обозначен сопряженный оператор, т. е. прямое значение нормальной производной от потенциала простого слоя; оно существует в том же смысле. Обратимость (ограниченных) операторов $\frac{1}{2}I - B$ и $\frac{1}{2}I - B'$ в $L^2(S)$ и $H_1(S)$ доказана в [9]; там же упомянуто второе равенство в (4.4). Как и выше, $\varphi \in H_1(S)$ и $u \in H_{3/2}(G_+) \cap C^\infty(G_+)$. Оператор T_+ — самосопряженный и отрицательный, и для него получаются такие же результаты, как для A , с учетом сказанного в §1 об операторах с двойным представлением (1.5); при этом постоянную c в асимптотике собственных значений надо заменить на $2c$.

4.2. Здесь мы оценим s -числа интегральных операторов на липшицевой поверхности с ядрами, определенными только на $S \times S$, в случае $-(n-1)/2 < m < 0$. Рассмотрим интегральный оператор

$$Au(x) = \int_S \varphi(x) \chi(x, y) |x-y|^q \psi(y) u(y) dS_y \quad (x \in S). \quad (4.6)$$

Здесь φ , ψ и χ — ограниченные измеримые функции, не превосходящие по модулю единицы, и q удовлетворяет условию

$$-(n-1) < q < -(n-1)/2. \quad (4.7)$$

Положим, как и раньше, $\gamma = q/(n-1) + 1$. Из (4.7) следует, что $\gamma \in (0, 1/2)$.

ТЕОРЕМА 4.1. *При этих условиях*

$$s_j(A) \leq C \max(\|\varphi\|, \|\varphi\|^\gamma) \max(\|\psi\|, \|\psi\|^\gamma) j^{-\gamma}, \quad (4.8)$$

где C — постоянная, зависящая только от S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай, когда вместо S мы имеем поверхность $\mathfrak{S}$, заданную в форме (1.1). Пусть h — положительный параметр. Обозначим через $\theta_h(x')$ функцию на $\mathbb{R}^{n-1}$, равную 1 при $|x'| \leq h$ и 0 при $|x'| > h$. Представим оператор A в виде суммы двух операторов $A_h^{(1)}$ и $A_h^{(2)}$ того же вида (4.6), но с дополнительными множителями $\theta_h(x'-y')$ и $1-\theta_h(x'-y')$, соответственно, под знаком интеграла. Воспользуемся тем, что s -числа оператора $A_h^{(1)}$ не превосходят его нормы (см. [12, гл. II]), а норма $\|A_h^{(1)}\|$ не превосходит $\sqrt{M_1 M_2}$, где

$$M_1 = \max_x \int \theta_h(x' - y') |x' - y'|^q \sqrt{1 + |\nabla f(y')|^2} dy',$$

$$M_2 = \max_y \int \theta_h(x' - y') |x' - y'|^q \sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2} dx'.$$

С учетом первого из неравенств (4.7) получаем

$$s_j(A_h^{(1)}) \leq C_1 \int_0^h r^{q+n-2} dr = C_2 h^{q+n-1}. \quad (4.9)$$

Теперь воспользуемся тем, что

$$js_j^2(A_h^{(2)}) \leq \|A_h^{(2)}\|^2, \quad (4.10)$$

где $\| \cdot \|^2$ — квадрат нормы Гильберта–Шмидта, т.е. интеграл от квадрата модуля ядра по $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ (см. [12, гл. III]). Имеем

$$\begin{aligned} \|A_h^{(2)}\|^2 &\leq \int_{\mathfrak{S}} |\varphi(x)|^2 dS_x \int_{\mathfrak{S}} [1 - \theta_h(x' - y')]^{2q} |x' - y'|^{2q} dS_y \\ &\leq C_3 \|\varphi\|^2 \int_h^\infty r^{2q+n-2} dr \leq C_4 \|\varphi\|^2 h^{2q+n-1} \end{aligned}$$

с учетом второго из неравенств (4.7). Аналогично

$$\|A_h^{(2)}\|^2 \leq C_4 \|\psi\|^2 h^{2q+n-1}.$$

Следовательно, $\|A_h^{(2)}\|^2 \leq C_4 \|\varphi\| \cdot \|\psi\| h^{2q+n-1}$, и в силу (4.10)

$$s_j(A_h^{(2)}) \leq C_5 j^{-1/2} \|\varphi\|^{1/2} \|\psi\|^{1/2} h^{q+(n-1)/2}. \quad (4.11)$$

Используя неравенство (3.7), из (4.9) и (4.11) получаем

$$s_j(A) \leq C_6 (j^{-1/2} \|\varphi\|^{1/2} \|\psi\|^{1/2} h^{q+(n-1)/2} + h^{q+n-1}). \quad (4.12)$$

Подставив сюда $h = (\|\varphi\| \cdot \|\psi\| j^{-1})^{1/(n-1)}$, мы приходим к неравенству

$$s_j(A) \leq C_7 \|\varphi\|^\gamma \|\psi\|^\gamma j^{-\gamma}. \quad (4.13)$$

Перейдем к случаю замкнутой поверхности S . Пусть

$$\sum_{1 \leq k \leq L} \alpha_k(x) \equiv 1 \quad (x \in S)$$

— достаточно мелкое разбиение единицы на S : если носители двух функций α_i и α_k имеют непустое пересечение, то объединение этих носителей лежит на графике одной липшицевой функции. Наш оператор A есть сумма операторов

$$A_{ik}u(x) = \int_S \alpha_i(x) \varphi(x) \alpha_k(y) \chi(x, y) |x - y|^q \psi(y) u(y) dS_y. \quad (4.14)$$

Мы можем считать уже установленной оценку

$$s_j(A_{ik}) \leq C_7 \|\alpha_i \varphi\|^\gamma \|\alpha_k \psi\|^\gamma j^{-\gamma} \quad (4.15)$$

в случаях, когда $i = k$ или $i \neq k$, но носители функций α_i и α_k пересекаются. Пусть теперь они не пересекаются. Тогда в (4.14) $|x - y|^q$ — ограниченная функция и $\|A_{jk}\|^2 \leq C_8 \|\alpha_i \varphi\|^2 \|\alpha_k \psi\|^2$, так что

$$s_j(A_{jk}) \leq C_9 \|\alpha_i \varphi\| \cdot \|\alpha_k \psi\| j^{-1/2}. \quad (4.16)$$

В (4.15) и (4.16), увеличивая константы, можно опустить множители α_i и α_k . Остается снова воспользоваться неравенством (3.7), и мы получаем (4.8). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Seeley R.* Refinement of the functional calculus of Calderón and Zigmund. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **68**, No. 3, 521–531 (1965).
2. *Агранович М. С.* Эллиптические операторы на замкнутом многообразии. Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, **63**, 3–129, ВИНТИ, М., 1990.
3. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Оценки сингулярных чисел интегральных операторов. УМН, **32**, вып. 1, 17–84 (1977).
4. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами, I, II. Вестн. ЛГУ, №13, 13–21 (1977) и №13, 5–10 (1979).
5. *Костометов Г. П.* Асимптотическое поведение спектра интегральных операторов с особенностью на диагонали. Матем. сб., **94** (136), №3, 444–451 (1974).
6. *Ivrii V.* Semiclassical Microlocal Analysis and Precise Spectral Asymptotics. Preprint 7: Chapter 10. Centre de Mathématiques, École Polytechnique, 1992.
7. *Лантес А. А.* Об оценках сингулярных чисел одного класса интегральных операторов. Записки научн. семинаров ЛОМИ, **110**, 95–99 (1981).
8. *Necas J.* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Academia, Prague, 1967.
9. *Verchota G.* Layer potentials and boundary value problems for Laplace equation on Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.*, **59**, 572–611 (1984).
10. *Costabel M.* Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results. *SIAM J. Math. Anal.*, **18**, №3, 613–626 (1988).
11. *Jerison D., Kenig C. E.* The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.*, **113**, No. 1, 161–219 (1995).
12. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Наука, М., 1965.
13. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. Наука, М., 1987.
14. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* О главном члене спектральной асимптотики негладких эллиптических задач. Функц. анализ и его прилож., **4**, вып. 4, 1–11 (1970).
15. *Агранович М. С.* Спектральные свойства задач дифракции. Добавление к книге: *Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А. Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. Наука, М., 1977.
16. *Агранович М. С.* Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой границе. В печати.

Московский государственный
институт электроники и математики

Поступило в редакцию
25 декабря 1995 г.