Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Голубева, В. П. Лексин, Квадратичные соотношения в когомологиях обобщенных крапчатых кос и тождества Данкла, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 2, 73–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa523>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 08:13:45

зависящей от N .) Так как при условии (3) $\mathcal{H}_N = \bigoplus_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_N^{(m)}$, то для каждого N можно найти такое число $m = m_N$, что

$$\inf \mathcal{H}_N^{(m_N)} \leq -d_1 N^2. \quad (10)$$

Неравенства (9), (10) противоречат неравенствам (8), и, следовательно, предположения о том, что $\sigma_d(\mathcal{H}_N) = \emptyset$ или, в ситуации (3), $\sigma_d(\mathcal{H}_N^{(m)}) = \emptyset$ для любого m при любых больших N , не верны, т. е. теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Avron J., Herbst I., Simon B. Ann. Phys., **114**, No. 4, 431 (1978). 2. Вугальтер С. А., Жислин Г. М. Теор. матем. физ., **76**, №1, 132–142 (1988). 3. Вигнер Е. Теория групп и ее приложения к квантово-механической теории атомных спектров. ИЛ, М., 1961. 4. Вугальтер С. А., Жислин Г. М. Теор. матем. физ., **97**, №1, 94–112 (1993). 5. Жислин Г. М., Сигалов А. Г. Изв. АН СССР, сер. матем., **29**, №4, 835–860 (1965).

Научно-исследовательский
радиофизический институт, Н. Новгород

Поступило в редакцию
25 апреля 1994 г.

УДК 517.986.9+515.165.4

Квадратичные соотношения в когомологиях обобщенных крашенных кос и тождества Данкла

© 1996. В. А. ГОЛУБЕВА, В. П. ЛЕКСИН¹

Пусть $A = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{z_i - z_j = 0\}$ — связка гиперплоскостей, ассоциированная с системой корней типа A_{n-1} , в комплексном аффинном пространстве $\mathbb{C}^n$ и $Y_n = \mathbb{C}^n \setminus A$ — дополнение к ней типа $K(\pi, 1)$. Группа крашенных кос P_n — это фундаментальная группа пространства Y_n , и для ее когомологий имеет место изоморфизм

$$H^*(P_n, \mathbb{Z}) = H^*(Y_n, \mathbb{Z}).$$

В работе [1] В. И. Арнольд показал, что когомологии $H^*(Y_n, \mathbb{Z})$ изоморфны подкольцу $\Omega(n)$ внешних форм на Y_n , порожденному над $\mathbb{Z}$ единицей и формами $\omega_{ij} = d(z_i - z_j)/(z_i - z_j)$, $i < j$. Там же дано комбинаторное описание этого кольца как внешней алгебры $\Lambda(n)$ с образующими $\omega_{ij} = \omega_{ji}$, $1 \leq i < j \leq n$, и квадратичными соотношениями

$$\omega_{ij} \wedge \omega_{jk} + \omega_{jk} \wedge \omega_{ik} + \omega_{ik} \wedge \omega_{ij} = 0. \quad (1)$$

Э. Брискорн в работе [2] доказал, что для любых конечных аффинных связок гиперплоскостей $S = \bigcup_{i \in I} H_i$ в $\mathbb{C}^n$ когомологии пространства $Y_n(S) = \mathbb{C}^n \setminus S$ изоморфны подкольцу $\Omega_n(S)$ в алгебре внешних форм на $Y_n(S)$, порожденному

¹Работа выполнена при частичной поддержке ISF, грант МЗС300, РФФИ и Российского правительства.

единицей и формами $\omega_{H_i} = d\alpha_{H_i}/\alpha_{H_i}$, $i \in I$, где α_{H_i} — линейная форма, определяющая гиперплоскость $H_i = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \alpha_{H_i}(z) = 0\}$.

В настоящей работе изучаются аналоги соотношений Арнольда для обобщенных групп крашенных кос. Обобщенная группа крашенных кос — это фундаментальная группа пространства $Y_n(S)$, когда связка S является связкой гиперплоскостей отражения некоторой конечной группы Кокстера. П. Орлик и Л. Соломон в работах [3] и [4] дали комбинаторное описание алгебры $\Omega_n(S) \otimes K$, где K — произвольное поле. Они показали, что это внешняя алгебра над K с образующими ω_{H_i} , $i \in I$, и соотношениями

$$\sum_{k=1}^p (-1)^k \omega_{H_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega}_{H_{i_k}} \wedge \cdots \wedge \omega_{H_{i_p}} = 0,$$

где $H_{i_1}, \dots, H_{i_p}$ — произвольный набор из p гиперплоскостей, пересечение которых имеет коразмерность $\leq p - 1$ для всех p , таких, что $3 \leq p \leq n$.

Цель работы — показать, что алгебра когомологий обобщенной группы крашенных кос для случая связок гиперплоскостей, отвечающих гиперплоскостям отражения системы корней типа B_n , а точнее, всем связкам гиперплоскостей расслоенного типа (определение см. в работе [5]), является квадратичной алгеброй. Для произвольной обобщенной группы крашенных кос получен аналог квадратичных соотношений Арнольда и указана их связь с тождествами Ч. Данкла из теории дифференциально-разностных операторов, отвечающих произвольным группам Кокстера [6].

Квадратичные соотношения Арнольда, отвечающие группе A_{n-1} , являются частным случаем тождеств Данкла, которые справедливы для любой группы Кокстера. Для записи последних введем необходимые определения и обозначения.

Рассмотрим конечную группу Кокстера G , порожденную отражениями в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Для каждой комплексифицированной гиперплоскости отражения выберем по одному «положительному» вектору α , ортогональному этой гиперплоскости (т.е. гиперплоскость определяется уравнением $(\alpha, z) = 0$, $z \in \mathbb{C}^n$). Обозначим совокупность таких векторов через Δ_+ ; положим также $\Delta = \Delta_+ \cup (-\Delta_+)$.

Пусть $B(\alpha, \beta)$ — билинейная форма на $\mathbb{C}^n$, обладающая следующим свойством:

$$B(s_\gamma \alpha, s_\gamma \beta) = B(\beta, \alpha), \quad \alpha \neq \beta,$$

для любого преобразования $s_\gamma \in G$, $\gamma \in \Delta_+$, $\gamma \in \mathbb{R}\alpha + \mathbb{R}\beta$. В работе [6] Данкл показал, что для любой группы Кокстера G и любого вращения $w \in G$ ($w \neq \text{id}$) вокруг гиперплоскости коразмерности 2 форма $B(\alpha, \beta)$ удовлетворяет соотношению

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Delta, \alpha \neq \pm\beta \\ s_\alpha s_\beta = w}} k_\alpha k_\beta \frac{B(\alpha, \beta)}{(\alpha, z)(\beta, z)} = 0,$$

где k_α — произвольная G -инвариантная функция на Δ .

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА. Для форм $\omega_\alpha = d(\alpha, z)/(\alpha, z)$, $\alpha \in \Delta$, $\omega_\alpha = \omega_{-\alpha}$, и для произвольного нетривиального вращения $w \in G$ (задаваемого парой отражений)

вокруг гиперплоскости коразмерности 2 выполняется соотношение

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Delta, \alpha \neq \pm\beta \\ s_\alpha s_\beta = w}} \omega_\alpha \wedge \omega_\beta = 0. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве формы $B(\alpha, \beta)$ выберем форму, сопоставляющую каждой паре векторов $\alpha \neq \pm\beta$ площадь проекции параллелограмма, натянутого на векторы α и β , на плоскость H , ортогональную к гиперплоскости V_{n-2} коразмерности 2, на которой тождественно действует элемент $w = s_\alpha s_\beta$ группы G . Такая форма удовлетворяет условию Данкла при ограничении на плоскость H . Так как при $k_\alpha = 1$ для любого $\alpha \in \Delta$ справедливо соотношение

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Delta, \alpha \neq \pm\beta \\ s_\alpha s_\beta = w}} \omega_\alpha \wedge \omega_\beta = \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Delta, \alpha \neq \pm\beta \\ s_\alpha s_\beta = w}} \frac{B(\alpha, \beta)}{(\alpha, z)(\beta, z)} du \wedge dv,$$

где u, v — некоторый выбранный базис в $\mathbb{R}\alpha + \mathbb{R}\beta$, то в силу тождества Данкла получаем требуемое соотношение (2). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Соотношение (2) для группы Кокстера A_{n-1} и $w = s_\alpha s_\beta$, где $(\alpha, z) = z_i - z_j$, $(\beta, z) = z_i - z_k$, $i < j < k$, $u = z_i - z_j$, $v = z_j - z_k$, в точности совпадает с соотношением Арнольда (1).

Для группы Кокстера, порожденной отражениями в $\mathbb{R}^n$, определим внешнюю алгебру $\Lambda_n(G)$ с образующими ω_α , $\alpha \in \Delta_+$, и соотношениями Орлика–Соломона второй степени

$$\omega_{\alpha_1} \wedge \omega_{\alpha_2} + \omega_{\alpha_2} \wedge \omega_{\alpha_3} + \omega_{\alpha_3} \wedge \omega_{\alpha_1} = 0 \quad (3)$$

для любой тройки векторов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, для которых гиперплоскости $H_i = (\alpha_i, z) = 0$ в $\mathbb{C}^n$ пересекаются по гиперплоскости коразмерности 2. Необходимо отметить, что тождества (2) являются следствием тождеств (3), но не наоборот.

Ниже будут рассматриваться связки гиперплоскостей отражений расслоенного типа. К ним относятся связки для групп Кокстера $A_{n-1}, B_n, G_2, I_2(p)$. Для них справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Для любой конечной группы Кокстера G , связка гиперплоскостей отражений которой имеет расслоенный тип, алгебра когомологий соответствующей обобщенной группы крашенных кос $P_n(G)$ является квадратичной алгеброй $\Lambda_n(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для группы A_{n-1} это результат Арнольда [1].

Проведем доказательство для случая группы B_n . В силу расслоенности типа связки гиперплоскостей B_n , согласно [5], когомологии $H^*(P_n(B_n))$ имеют базис, состоящий из единицы и форм вида

$$\omega_{i_1 k_1}^\pm \wedge \cdots \wedge \omega_{i_s k_s}^\pm, \quad (4)$$

где $0 \leq i_l < k_l \leq n$, $k_1 < \cdots < k_s$,

$$\omega_{ik}^\pm = \frac{d(z_i \pm z_k)}{z_i \pm z_k}, \quad i \neq 0, \quad \omega_{0k} = \omega_{0k}^\pm = \frac{dz_k}{z_k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

В алгебре $\Lambda_n(B_n)$ можно выбрать систему образующих вида (4). Действительно, для $\Lambda_n(B_n)$ тождества (3) имеют вид

$$\omega_{0k} \wedge \omega_{ik}^- + \omega_{ik}^- \wedge \omega_{0i} + \omega_{0i} \wedge \omega_{0k} = 0,$$

$$\omega_{ik}^- \wedge \omega_{ik}^+ + \omega_{ik}^+ \wedge \omega_{0k} + \omega_{0k} \wedge \omega_{ik}^- = 0,$$

$$\omega_{0k} \wedge \omega_{ik}^+ + \omega_{ik}^+ \wedge \omega_{0i} + \omega_{0i} \wedge \omega_{0k} = 0$$

а также вид (1) для троек ω_{ij}^- , ω_{jk}^- , ω_{ik}^- , $i < j < k$, а также для троек $\omega_{ij}^{\varepsilon_1}$, $\omega_{jk}^{\varepsilon_2}$, $\omega_{ik}^{\varepsilon_3}$, $i < j < k$, таких, что среди $\varepsilon_i = \pm$ ($i = 1, 2, 3$) имеется ровно два плюса. С помощью этих тождеств можно добиться устранения образующих в $\Lambda_n(B_n)$, сомножители которых имеют одинаковые вторые индексы. В силу последних тождеств естественный гомоморфизм

$$\Lambda_n(B_n) \rightarrow \Omega(B_n) = H^*(Y_n(B_n)) = H^*(P_n(B_n))$$

является не только эпиморфизмом (тождества (3) для форм имеют место), но и мономорфизмом.

Квадратичность когомологий для групп крашенных кос, соответствующих связкам гиперплоскостей в случаях G_2 и $I_2(p)$, устанавливается тривиально, так как пространства $Y_2(G_2)$ и $Y_2(I_2(p))$ являются гомологически двумерными комплексами.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Матем. заметки, **5**, №2, 227–231 (1969).
2. Брискорн Э. Математика (сб. переводов), **18**, №3, 46–59 (1974).
3. Orlik P., Solomon L. Invent. Math., **56**, 167–189 (1980).
4. Orlik P., Solomon L. Contemp. Math., **34**, 29–64 (1984).
5. Falk M., Randell R. Invent. Math., **82**, No. 1, 77–88 (1985).
6. Dunkl C. Trans. Am. Math. Soc., **311**, No. 1, 77–88 (1989).

Всероссийский институт
научной и технической информации

Коломенский педагогический институт

Поступило в редакцию
5 мая 1995 г.

УДК 517.984

Спектр трехчастичного решетчатого гамильтониана общего вида

© 1996. Ю. В. Жуков¹

1. Рассмотрим систему их трех взаимодействующих квантовых частиц, движущихся по решетке $\mathbb{Z}^\nu$. В общем случае гамильтониан $\hat{H}(\varepsilon)$ такой системы

¹Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант MG-J300) и Международной Соросовской программы образования в области точных наук (грант а876-м).