Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Жуков, Спектр трехчастичного решетчатого гамильтониана общего вида, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 2, 76–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa524>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:19:08

В алгебре $\Lambda_n(B_n)$ можно выбрать систему образующих вида (4). Действительно, для $\Lambda_n(B_n)$ тождества (3) имеют вид

$$\omega_{0k} \wedge \omega_{ik}^- + \omega_{ik}^- \wedge \omega_{0i} + \omega_{0i} \wedge \omega_{0k} = 0,$$

$$\omega_{ik}^- \wedge \omega_{ik}^+ + \omega_{ik}^+ \wedge \omega_{0k} + \omega_{0k} \wedge \omega_{ik}^- = 0,$$

$$\omega_{0k} \wedge \omega_{ik}^+ + \omega_{ik}^+ \wedge \omega_{0i} + \omega_{0i} \wedge \omega_{0k} = 0$$

а также вид (1) для троек ω_{ij}^- , ω_{jk}^- , ω_{ik}^- , $i < j < k$, а также для троек $\omega_{ij}^{\varepsilon_1}$, $\omega_{jk}^{\varepsilon_2}$, $\omega_{ik}^{\varepsilon_3}$, $i < j < k$, таких, что среди $\varepsilon_i = \pm$ ($i = 1, 2, 3$) имеется ровно два плюса. С помощью этих тождеств можно добиться устранения образующих в $\Lambda_n(B_n)$, сомножители которых имеют одинаковые вторые индексы. В силу последних тождеств естественный гомоморфизм

$$\Lambda_n(B_n) \rightarrow \Omega(B_n) = H^*(Y_n(B_n)) = H^*(P_n(B_n))$$

является не только эпиморфизмом (тождества (3) для форм имеют место), но и мономорфизмом.

Квадратичность когомологий для групп крашенных кос, соответствующих связкам гиперплоскостей в случаях G_2 и $I_2(p)$, устанавливается тривиально, так как пространства $Y_2(G_2)$ и $Y_2(I_2(p))$ являются гомологически двумерными комплексами.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Матем. заметки, **5**, №2, 227–231 (1969).
2. Брискорн Э. Математика (сб. переводов), **18**, №3, 46–59 (1974).
3. Orlik P., Solomon L. Invent. Math., **56**, 167–189 (1980).
4. Orlik P., Solomon L. Contemp. Math., **34**, 29–64 (1984).
5. Falk M., Randell R. Invent. Math., **82**, No. 1, 77–88 (1985).
6. Dunkl C. Trans. Am. Math. Soc., **311**, No. 1, 77–88 (1989).

Всероссийский институт
научной и технической информации

Поступило в редакцию
5 мая 1995 г.

Коломенский педагогический институт

УДК 517.984

Спектр трехчастичного решетчатого гамильтониана общего вида

© 1996. Ю. В. Жуков¹

1. Рассмотрим систему их трех взаимодействующих квантовых частиц, движущихся по решетке $\mathbb{Z}^\nu$. В общем случае гамильтониан $\hat{\mathbf{H}}(\varepsilon)$ такой системы

¹Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант MG-J300) и Международной Соросовской программы образования в области точных наук (грант а876-м).

действует в $l_2(\mathbb{Z}^{3\nu})$ и задается формулами

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{H}}(\varepsilon) &= \tilde{\mathbf{H}}_0 + \varepsilon \tilde{\mathbf{V}}, \\ (\tilde{\mathbf{H}}_0 \varphi)(k_1, k_2, k_3) &= \sum_{q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Z}^\nu} \tilde{a}(k_1 - q_1, k_2 - q_2, k_3 - q_3) \varphi(q_1, q_2, q_3), \\ (\tilde{\mathbf{V}} \varphi)(k_1, k_2, k_3) &= \tilde{V}(k_1, k_2, k_3) \varphi(k_1, k_2, k_3), \quad \varphi \in l_2(\mathbb{Z}^{3\nu}), \\ \tilde{V}(k_1, k_2, k_3) &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \tilde{V}_{ij}(k_i - k_j) + \tilde{V}_0(k_1, k_2, k_3).\end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon \in \mathbb{R}$, а предположения относительно функций $\tilde{a}(k_1, k_2, k_3)$ и $\tilde{V}(k_1, k_2, k_3)$ будут сформулированы ниже (в терминах их преобразования Фурье).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\nu \geq 3$. Тогда при достаточно малых ε операторы $\tilde{\mathbf{H}}(\varepsilon)$ и $\mathbf{H}_0$ унитарно эквивалентны.

Эта теорема аналогична известной теореме Йориро–О’Кэррола [1], в которой рассматривается система из квантовых взаимодействующих частиц, движущихся в $\mathbb{R}^\nu$. Теорема 1 для решетчатого газа была впервые доказана в [2] для случая, когда функция $\tilde{a}(k_1, k_2, k_3)$ имеет специальный вид: $\tilde{a}(k_1, k_2, k_3) = \tilde{a}_0(k_1) + \tilde{a}_0(k_2) + \tilde{a}_0(k_3)$. В настоящей работе мы обобщаем этот результат на случай функции $\tilde{a}(k_1, k_2, k_3)$ более общего вида.

2. Перейдем теперь к преобразованию Фурье

$$\varphi(k_1, k_2, k_3) \rightarrow f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3\nu/2}} \sum_{k_1, k_2, k_3} \varphi(k_1, k_2, k_3) e^{i \sum_{j=1}^3 (k_j, \lambda_j)},$$

где $(k, \lambda) = \sum_{s=1}^\nu k^{(s)} \lambda^{(s)}$, $k \in \mathbb{Z}^\nu$, $\lambda \in \mathbb{T}^\nu$, $\mathbb{T}^\nu$ есть ν -мерный тор, $f \in L_2(\mathbb{T}^{3\nu})$ и $\varphi \in l_2(\mathbb{Z}^{3\nu})$. При этом оператор $\tilde{\mathbf{H}}(\varepsilon)$ перейдет в оператор $\mathbf{H}(\varepsilon)$, действующий в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu)$ как кластерный оператор [3]:

$$(\mathbf{H}(\varepsilon)f)(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \iiint_{(\mathbb{T}^\nu)^3} h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) f(\mu_1, \mu_2, \mu_3) d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3,$$

где (обобщенное) ядро имеет вид

$$\begin{aligned}h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) &= a(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \prod_{i=1}^3 \delta(\lambda_i - \mu_i) \\ &+ \varepsilon \sum_{i=1}^3 K_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \delta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3) \delta(\lambda_i - \mu_i) \\ &+ \varepsilon K_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \delta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3).\end{aligned}$$

Здесь функция $a(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ равна

$$\frac{1}{(2\pi i)^{3\nu/2}} \sum_{k_1, k_2, k_3} \tilde{a}(k_1, k_2, k_3) \exp \left\{ i \sum_{j=1}^3 (\lambda_j, k_j) \right\}$$

(мы будем предполагать, что это гладкая вещественная функция при $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in (\mathbb{T}^\nu)^3$), а K_0 и K_i , $i = 1, 2, 3$, — гладкие функции, определенные соответ-

ственно на многообразиях

$$S_0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in (\mathbb{T}^\nu)^6 : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3\},$$

$$S_i = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in (\mathbb{T}^\nu)^6 : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \mu_i = \lambda_i\}$$

и симметричные в следующем смысле:

$$K_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = \overline{K}_0(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

$$K_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = \overline{K}_1(\mu_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1, \mu_2, \mu_3)$$

(и аналогичные равенства выполняются для K_2 и K_3).

В такой ситуации операторы $\mathbf{H}(\varepsilon)$ и $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}(0)$ являются ограниченными и самосопряженными.

В дальнейшем нам потребуются некоторые дополнительные предположения. А именно, мы будем считать, что функции a и K_i аналитичны в некоторых комплексных окрестностях своих областей определения. В рассматриваемой здесь решетчатой модели это требование автоматически вытекает из соответствующих кластерных оценок для функций $\tilde{a}$, $\tilde{V}$ (см. [4]).

Кроме того, мы предполагаем, что сужения a_Λ и a_{Λ, λ_i} функции $a(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ на множества

$$\Gamma_\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{T}^{3\nu} : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \Lambda\},$$

$$\Gamma_{\Lambda, \lambda}^{(i)} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Gamma_\Lambda : \lambda_i = \lambda\}, \quad i = 1, 2, 3,$$

соответственно имеют конечное число только невырожденных критических точек для любых $\Lambda, \lambda \in \mathbb{T}^\nu$.

Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\nu \geq 3$. Тогда для любых ε существуют прямые волновые операторы

$$\mathbf{W}_\pm = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} e^{it\mathbf{H}(\varepsilon)} e^{-it\mathbf{H}_0},$$

и при достаточно малых ε существуют обратные волновые операторы

$$\mathbf{W}_\pm^* = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} e^{it\mathbf{H}_0} e^{-it\mathbf{H}(\varepsilon)}.$$

При этом операторы $\mathbf{W}_\pm$ и $\mathbf{W}_\pm^*$ унитарны: $\mathbf{W}_\pm^* = \mathbf{W}_\pm^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае когда главный «символ» является линейной формой вида $a(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^3 (c_i, \lambda_i)$, $c_i \neq 0$ для любого i , теорема 2 вытекает, например, из результатов В. С. Буслаева [5] (см. также [6]).

СЛЕДСТВИЕ. Спектр оператора $\mathbf{H}(\varepsilon)$ при достаточно малых ε абсолютно непрерывен и заполняет отрезок $[a_1, a_2]$, где

$$a_1 = \min_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{T}^\nu} a(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad a_2 = \max_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{T}^\nu} a(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

3. Доказательство теоремы 2 основано на методе Кука [1]. Случай прямых волновых операторов $\mathbf{W}_\pm$ элементарен; в случае обратных волновых операторов $\mathbf{W}_\pm^*$ необходимо показать, что норма

$$\|(\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) e^{-it\mathbf{H}} f\|_{\mathcal{H}} \text{ принадлежит } L_1(\mathbb{R}) \quad (1)$$

как функция от $t \in \mathbb{R}$ для всех f из некоторого специально выбранного множества $\mathcal{D}$, плотного в $\mathcal{H}$. Для этого мы используем представление экспоненты оператора $\mathbf{H}$ через его резольвенту $R_{\mathbf{H}}(z)$:

$$e^{-it\mathbf{H}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-itz} R_{\mathbf{H}}(z) dz, \quad (2)$$

где γ — контур, обходящий спектр оператора $\mathbf{H}$ в отрицательном направлении, а в качестве множества $\mathcal{D}$ выбираем множество функций $f \in \mathcal{H}$, аналитических и ограниченных в некоторой комплексной окрестности тора $(\mathbb{T}^\nu)^3$.

Подробное исследование резольвенты $R_{\mathbf{H}}(z)$ оператора $\mathbf{H}$ позволяет установить (при малых ε) следующие факты относительно функции

$$\Psi(\lambda, z, f) = [(\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) R_{\mathbf{H}}(z) f](\lambda), \quad \lambda \in (\mathbb{T}^\nu)^3, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [a_1, a_2], \quad f \in \mathcal{D} :$$

(а) функция $\Psi(\lambda, z, f)$ для любой функции $f \in \mathcal{D}$ является аналитической по $z \in \mathbb{C} \setminus [a_1, a_2]$ и имеет пределы при выходе на вещественную ось

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \Psi(\lambda, x \pm i\eta, f) = \Psi(\lambda, x \pm i0, f) = \Psi_{\pm}(\lambda, x, f), \quad \eta > 0,$$

равномерные по $x \in \mathbb{R}$;

(б) у функций $\Psi_{\pm}(\lambda, x, f)$ существуют преобразования Фурье

$$\tilde{\Psi}_{\pm}(\lambda, t, f) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} \Psi_{\pm}(\lambda, x, f) dx,$$

и они обладают тем свойством, что

$$\int_{\mathbb{R}} \|\tilde{\Psi}_{\pm}(\cdot, t, f)\|_{\mathcal{H}} dt < \infty.$$

Свойство (а) позволяет деформировать контур γ в интеграле (2) так, что

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} e^{-izt} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) R_{\mathbf{H}}(z) f dz &= \int_{\mathbb{R}-i0} \cdots - \int_{\mathbb{R}+i0} \cdots \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} [\Psi(\lambda, x - i0, f) - \Psi(\lambda, x + i0, f)] dx, \end{aligned}$$

а из свойства (б) в силу последнего равенства вытекает существование пределов $\mathbf{W}_{\pm}^*$, что и доказывает теорему 2.

Из теоремы 2 вытекает теорема 1.

Подробные доказательства изложенных результатов составят содержание отдельной публикации.

Автор глубоко признателен Р. А. Минлосу за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руд М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния, Т. 4. Анализ операторов. Мир, М., 1982. 2. Melnikov A. M., Mogilner A. I. J. Phys. A: Math. Gen., **24**, 3671–3676 (1991). 3. Minlos R. A.,

Mogilner A. I. Mathematical Problems of Statistical Mechanics and Dynamics, R. L. Dobrushin ed., Reidel, Dordrecht (1986), pp. 139–160. **4.** *Мальшиев В. А., Минлос Р. А.* Линейные операторы в бесконечночастичных системах. Наука, М., 1994. **5.** *Буслаев В. С.* Записки научн. семин. ЛОМИ, **27**, 47–66 (1972). **6.** *Буслаев В. С., Вакуленко А. Ф.* Вестник ЛГУ, **13**, 22–30 (1977).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
6 апреля 1995 г.

УДК 517.913

О неинтегрируемости ABC -течения при $A = B$

© 1996. С. Л. Зиглин¹

В работе продолжается исследование вопроса о существовании (непостоянного) первого интеграла у системы [1, 2]

$$\dot{x} = A \sin z + C \cos y, \quad \dot{y} = B \sin x + A \cos z, \quad \dot{z} = C \sin y + B \cos x, \quad (1)$$

описывающей стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости с периодическими граничными условиями и полем скорости, коллинеарным своему ротору, которое называется ABC -течением [3]. Этот вопрос возник из теории магнитного динамо. Отсутствие первого интеграла указывает на возможность стохастического поведения в рассматриваемой системе, при котором происходит экспоненциальное по времени разбегание близких частиц жидкости, приводящее к экспоненциальному росту в замороженного магнитного поля (подробнее см. [4]).

Не ограничивая общности, будем считать A, B, C неотрицательными (этого можно добиться сдвигом координат на π). В [5] было доказано отсутствие у системы (1) при $0 \neq A \neq B \neq 0$ и достаточно малых $C \neq 0$ 2π -периодического по координатам комплексного мероморфного первого интеграла, а при выполнении некоторого дополнительного неравенства относительно A и B — и вещественного первого интеграла.

В настоящей работе рассматривается случай $A = B$. Основной результат составляет

ТЕОРЕМА. При $C^2/A^2 \neq 2(n^2 - 1)/(n^2 + 7)$, n целое, система (1) не имеет на комплексном торе $T_{\mathbb{C}}^3$ с координатами $x, y, z \pmod{2\pi}$ мероморфного первого интеграла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что $A = B = 1$ (этого можно добиться заменой времени). Система (1) имеет частное решение $(x, y, z) = \varphi(\tau)$, задаваемое формулами

$$y(\tau) = \pi/4, \quad z(\tau) = x(\tau) + \pi/2, \\ \sin x(\tau) = -\frac{2\sqrt{1-\mu^2}(1-\tau^2)}{(1-\mu)(1-\tau)^2 + (1+\mu)(1+\tau)^2},$$

¹Работа поддержана Международным научным фондом, грант МСУ300.