Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Зиглин, О неинтегрируемости ABC -течения
при $A = B$, *Функц. анализ и его прил.*, 1996,
том 30, выпуск 2, 80–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa525>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 15:51:03

Mogilner A. I. Mathematical Problems of Statistical Mechanics and Dynamics, R. L. Dobrushin ed., Reidel, Dordrecht (1986), pp. 139–160. **4.** *Мальшиев В. А., Минлос Р. А.* Линейные операторы в бесконечночастичных системах. Наука, М., 1994. **5.** *Буслаев В. С.* Записки научн. семин. ЛОМИ, **27**, 47–66 (1972). **6.** *Буслаев В. С., Вакуленко А. Ф.* Вестник ЛГУ, **13**, 22–30 (1977).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
6 апреля 1995 г.

УДК 517.913

О неинтегрируемости ABC -течения при $A = B$

© 1996. С. Л. Зиглин¹

В работе продолжается исследование вопроса о существовании (непостоянного) первого интеграла у системы [1, 2]

$$\dot{x} = A \sin z + C \cos y, \quad \dot{y} = B \sin x + A \cos z, \quad \dot{z} = C \sin y + B \cos x, \quad (1)$$

описывающей стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости с периодическими граничными условиями и полем скорости, коллинеарным своему ротору, которое называется ABC -течением [3]. Этот вопрос возник из теории магнитного динамо. Отсутствие первого интеграла указывает на возможность стохастического поведения в рассматриваемой системе, при котором происходит экспоненциальное по времени разбегание близких частиц жидкости, приводящее к экспоненциальному росту вмороженного магнитного поля (подробнее см. [4]).

Не ограничивая общности, будем считать A, B, C неотрицательными (этого можно добиться сдвигом координат на π). В [5] было доказано отсутствие у системы (1) при $0 \neq A \neq B \neq 0$ и достаточно малых $C \neq 0$ 2π -периодического по координатам комплексного мероморфного первого интеграла, а при выполнении некоторого дополнительного неравенства относительно A и B — и вещественного первого интеграла.

В настоящей работе рассматривается случай $A = B$. Основной результат составляет

ТЕОРЕМА. При $C^2/A^2 \neq 2(n^2 - 1)/(n^2 + 7)$, n целое, система (1) не имеет на комплексном торе $T_{\mathbb{C}}^3$ с координатами $x, y, z \pmod{2\pi}$ мероморфного первого интеграла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что $A = B = 1$ (этого можно добиться заменой времени). Система (1) имеет частное решение $(x, y, z) = \varphi(\tau)$, задаваемое формулами

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \pi/4, & z(\tau) &= x(\tau) + \pi/2, \\ \sin x(\tau) &= -\frac{2\sqrt{1-\mu^2}(1-\tau^2)}{(1-\mu)(1-\tau)^2 + (1+\mu)(1+\tau)^2}, \end{aligned}$$

¹Работа поддержана Международным научным фондом, грант МСУ300.

$$\cos x(\tau) = \frac{(1-\mu)(1-\tau)^2 - (1+\mu)(1+\tau)^2}{(1-\mu)(1-\tau)^2 + (1+\mu)(1+\tau)^2},$$

$$\tau = \exp \sqrt{1-\mu^2} t, \quad \mu = C/\sqrt{2}.$$

Его фазовая кривая Γ в $T_{\mathbb{C}}^3$ является сферой Римана с четырьмя выколотыми точками: $\varphi(0)$, $\varphi(\infty)$, $\varphi(-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1})$.

Вводя обозначения $\xi = dx - dz$, $\eta = dy$, $' = d/d\tau$, запишем систему в нормальных вариациях вдоль Γ в виде

$$\xi' = \frac{\xi \sin x(\tau) - 2\mu\eta}{\tau\sqrt{1-\mu^2}}, \quad \eta' = \frac{\xi \cos x(\tau)}{\tau\sqrt{1-\mu^2}}. \quad (2)$$

Согласно [6], для того чтобы система (1) имела мероморфный первый интеграл, необходимо, чтобы группа монодромии системы (2) имела рациональный первый интеграл.

Нетрудно проверить, что при любом $\mu \neq 0, 1$ жордановы нормальные формы матриц преобразований под действием системы (2) при обходе точек $\tau = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$ являются жордановыми клетками с единичными собственными значениями. Отсюда следует [7], что для существования рационального первого интеграла группы монодромии необходимо, чтобы все ее преобразования имели общее собственное направление. (Хотя в [7] говорится о полиномиальном первом интеграле, доказательство справедливо и для рационального.)

Из инвариантности системы (2) относительно преобразования $f: (\xi, \eta, \tau) \mapsto (-\xi, \eta, \tau^{-1})$ (являющейся следствием инвариантности системы (1) относительно преобразования $(x, y, z, t) \mapsto (-x, y, \pi - z, -t)$) следует, что если взять отмеченную точку на плоскости τ , инвариантную относительно f , т.е. 1 или -1 , то указанное собственное направление должно быть инвариантным относительно f . Поэтому собственные значения взаимно обратных преобразований под действием системы (2) при обходе точек $\tau = 0, \infty$, соответствующие этому направлению, должны быть равны ± 1 , в то время как из (2) непосредственно следует, что они равны $-\exp[\pm \pi i \sqrt{(1+7\mu^2)/(1-\mu^2)}]$. Отсюда получаем, что для существования рационального первого интеграла группы монодромии необходимо, чтобы $\sqrt{(1+7\mu^2)/(1-\mu^2)} = \sqrt{(2+7C^2)/(2-C^2)}$ было целым, что и доказывает теорему.

Автор благодарен В. И. Арнольду за предложенную задачу, Х. Йошиде за присланный оттиск работы [7] и А. И. Нейштадту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. Наука, М., 1974.
2. Непом М. C. R. Acad. Sci. Paris, **262**, 312–314 (1966).
3. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Усиков У. А., Черников А. А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. Наука, М., 1991.
4. Арнольд В. И. В сб.: Некоторые вопросы современного анализа. Изд-во МГУ, М., 1984, с. 8–21.
5. Зиглин С. Л. Изв. АН СССР, сер. матем., **51**, вып. 5, 1088–1103 (1987).
6. Зиглин С. Л. Функц. анализ и его прил., **16**, вып. 3, 30–41 (1982).
7. Yoshida H., Ramani A., Grammaticos B., Hietarinta J. Phys. A, **144**, 310–321 (1987).