Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, К задаче Паули, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 2, 82–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa526>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:05:46

К задаче Паули

© 1996. Р. С. Исмагилов¹

Пусть, как обычно, $L_2(\mathbb{R}^n)$ означает комплексное гильбертово пространство функций, квадратично интегрируемых по мере Лебега в $\mathbb{R}^n$. Через $\hat{f}$ обозначим преобразование Фурье элемента $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, определенное формулой

$$\hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-2\pi i(x, s)) dx.$$

Задача Паули, изучавшаяся в недавней работе Б. З. Мороза и А. М. Переломова [1], состоит в следующем:

описать линейно независимые пары элементов f_1, f_2 из $L_2(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} |f_1(x)| &= |f_2(x)| & \forall x \in \mathbb{R}^n \bmod 0, \\ |\hat{f}_1(s)| &= |\hat{f}_2(s)| & \forall s \in \mathbb{R}^n \bmod 0 \end{aligned} \quad (1)$$

(запись $\mathbb{R}^n \bmod 0$ означает подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, имеющее полную лебегову меру). В [1] приведены также некоторые модификации этой задачи.

В предлагаемой заметке содержатся два результата. Во-первых, для $n = 1$ мы приводим контрпример к гипотезе, сформулированной в [1]. (Эта гипотеза предлагала полное решение задачи Паули для $n = 1$.) Этот контрпример показывает, что множество пар элементов со свойством (1) весьма велико (и в настоящий момент не обозримо). Во-вторых, в случае произвольного $n \geq 1$ мы привлекаем представление Вейля симплектической группы $\text{Sp}(2n)$ к рассматриваемому вопросу.

1. Случай $n = 1$; контрпример. При $n = 1$ имеется следующий простой способ построения пар f_1, f_2 , удовлетворяющих условию (1). Возьмем точку $a \in \mathbb{R}$ и вещественные измеримые функции $\rho(x), \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, и положим

$$f_1(x) = \rho(x) \exp(i\varphi(x)), \quad f_2(x) = \rho(x) \exp(-i\varphi(a - x)). \quad (2)$$

Если $\rho \in L_2(\mathbb{R})$, $\rho \neq 0$, $\rho(x) \geq 0$, $\rho(x) = \rho(a - x)$ при $x \in \mathbb{R} \bmod 0$, то функции (2) удовлетворяют условию (1). Если, кроме того, функция $\exp(\varphi(x) + \varphi(a - x))$ не постоянна, то f_1, f_2 линейно независимы.

В работе [1] была высказана следующая гипотеза: при $n = 1$ описанная конструкция дает полное решение задачи Паули. Сейчас мы построим контрпример к этой гипотезе.

Зафиксируем вещественные бесконечно дифференцируемые функции $\varphi(x), w(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим условиям:

¹Работа выполнена при поддержке Фонда Дж. Сороса и Американского математического общества.

1) $\varphi(x+1) = \varphi(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, причем число 1 является наименьшим периодом функции $\varphi(x)$;

2) функция $w(x)$ неотрицательна, отлична от тождественного нуля, быстро стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ и $\hat{w}(s) = 0$ при $|s| > 1/2$ (через $\hat{w}(s)$ обозначено преобразование Фурье функции $w(x)$). Рассмотрим семейство функций

$$f_a(x) = w(x) \exp(i\varphi(x-a)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in (0, 1/2).$$

Ясно, что любая пара функций этого семейства линейно независима и $|f_a(x)| = w(x)$. Таким образом, функции $x \mapsto |f_a(x)|$ не зависят от a . Покажем, что функции $s \mapsto |\hat{f}_a(s)|$ также не зависят от a .

С этой целью разложим функцию $\exp(i\varphi(x))$ в ряд Фурье:

$$\exp(i\varphi(x)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(2\pi i k x).$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(-2\pi k a i) \exp(2\pi i k x) w(x), \\ \hat{f}_a(s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(-2\pi i k a) \hat{w}(s-k). \end{aligned}$$

Так как функция $\hat{w}(s)$ сосредоточена в отрезке $[-1/2, 1/2]$, то носители функций $\hat{w}(s-k)$ попарно не пересекаются. Следовательно,

$$|\hat{f}_a(s)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \cdot |\hat{w}(s-k)|.$$

Обозначив последнюю функцию через $v(s)$, приходим к равенствам

$$|f_a(x)| = w(x), \quad |\hat{f}_a(s)| = v(s) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in (0, 1/2).$$

Итак, множество $\{f \in L_2(\mathbb{R}) : |f(x)| = w(x), |\hat{f}(s)| = v(s), x, s \in \mathbb{R} \bmod 0\}$ содержит бесконечно много попарно не пропорциональных элементов. Это и есть контрпример к гипотезе из [1].

2. Применение представления Вейля. Пусть теперь $n \geq 1$. Несколько изменим постановку задачи Паули. Возьмем измеримые комплекснозначные функции $\alpha(x)$, $\beta(s)$, $x, s \in \mathbb{R}^n$, такие, что $|\alpha(x)| = 1$, $|\beta(s)| = 1$ при $x \in \mathbb{R}^n \bmod 0$, $s \in \mathbb{R}^n \bmod 0$. Рассмотрим следующую задачу:

описать линейно независимые пары элементов $f_1, f_2 \in L_2(\mathbb{R}^n)$, такие, что

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \alpha(x) f_1(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n \bmod 0, \\ \hat{f}_2(s) &= \lambda \beta(s) \hat{f}_1(s) & \forall s \in \mathbb{R}^n \bmod 0 \end{aligned} \tag{3}$$

для некоторого числа λ , $|\lambda| = 1$. (Функции $\alpha(x)$, $\beta(s)$ можно назвать фазовыми.)

Решим эту задачу для функций

$$\alpha(x) = \exp(\pi i(ax, x)), \quad \beta(s) = \exp(\pi i(bs, s)), \quad (4)$$

где a, b — симметрические вещественные матрицы порядка n , а $(\cdot, \cdot)$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

С этой целью рассмотрим симплектическую группу

$$G = \mathrm{Sp}(2n) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}), g'Jg = J \right\},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

(Здесь g' — транспонированная к матрице g , I — единичная матрица.) В пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ действует проективное представление Вейля $T(g)$, $g \in G$, определенное равенствами [2, с. 43]

$$(T(g_b)f)(x) = \exp(\pi i(bx, x)), \quad g_b = \begin{pmatrix} I & b \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad b = b', \quad (T(J)f)(x) = \widehat{f}(x).$$

Условия (3) равносильны равенствам $f_2 = T(g_a)f_1$, $T(J)f_2 = \lambda T(g_b)T(J)f_1$. Отсюда $T(J^{-1}g_{-b}Jg_a)f_1 = \lambda_1 f_1$, $|\lambda_1| = 1$. Положим $h_{a,b} = J^{-1}g_{-b}Jg_a$. Тогда

$$h_{a,b} = \begin{pmatrix} I & a \\ b & I + ba \end{pmatrix}, \quad T(h_{a,b})f_1 = \lambda_1 f_1.$$

Итак, f_1 — собственный вектор для $T(h_{a,b})$. Но это возможно лишь тогда, когда матрица $h_{a,b}$ сопряжена (в группе G) ортогональной матрице вида

$$\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}, \quad c, d \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}), \quad c + id \in U(n).$$

Автору неизвестна полная характеристизация пар симметрических матриц a, b , для которых выполнено это условие. Легко доказать, что оно выполняется, если $a > 0$, $-4a^{-1} < b < 0$ (неравенства для матриц определяются через квадратичные формы). В этом достаточном условии можно также поменять местами матрицы a и b . При указанных условиях существует пара f_1, f_2 со свойством (3). При $n = 1$ эта пара может быть записана в виде (2). Мы не останавливаемся на явных формулах для функций f_1, f_2 из (3). Заметим лишь, что они выражаются через функции Эрмита и экспоненты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мороз Б. З., Переломов А. М. Теор. матем. физ., **101**, №1, 60–65 (1994).
2. Лион Ж., Вернь М. Представление Вейля, индекс Маслова и тэта-ряды. Мир, М., 1983.