Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Кадец, Об абсолютной, совершенной и безусловной сходимости двойных рядов, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 2, 85–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa527>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 09:53:38

УДК 517.52

Об абсолютной, совершенной и безусловной сходимости двойных рядов

© 1996. М. И. КАДЕЦ¹

Ряд $\sum x_n$ в пространстве Банаха X называется абсолютно сходящимся, если сходится числовой ряд $\sum \|x_n\|$. Ряд называется совершенно сходящимся, если для любого набора коэффициентов $\alpha_n = \pm 1$ (обозначение: $\alpha \in D$) сходится ряд $\sum \alpha_n x_n$. Ряд называется безусловно сходящимся, если для любой перестановки натурального ряда $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ сходится ряд $\sum x_{\pi(n)}$. Понятия совершенной и безусловной сходимости эквивалентны. Каждый абсолютно сходящийся ряд сходится совершенно. Обратное верно в том и только в том случае, когда пространство конечномерно. Для дальнейшего нам потребуется банахово пространство $\text{Perf}(X)$ всех совершенно сходящихся рядов в X . Норма в этом пространстве определяется как $\sup \{ \|\sum \alpha_n x_n\| : \alpha \in D \}$. По поводу упомянутых понятий и фактов см., например, монографию [1].

Перейдем к рассмотрению двойных рядов. Прежде всего дадим определение сходимости двойного ряда, являющееся некоторым усилением определения сходимости по Принсгейму.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ряд $\sum x_{ij}$ в банаховом пространстве X сходится к сумме $s \in X$, если (а) сходится каждый «ряд-столбец» $\sum_i x_{ij}$, $j \in \mathbb{N}$, (б) сходится каждый «ряд-строка» $\sum_j x_{ij}$, $i \in \mathbb{N}$, (с) сходится последовательность «прямоугольных» частных сумм:

$$s = \lim s_{mn} = \lim \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} : \min(m, n) \rightarrow \infty \right\}.$$

Понятия абсолютной, совершенной и безусловной сходимости для двойных рядов, хорошо согласованные со структурой этих рядов, можно ввести следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Ряд $\sum x_{ij}$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится числовой ряд $\sum \|x_{ij}\|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Ряд $\sum x_{ij}$ называется *совершенно сходящимся*, если для любых наборов коэффициентов $\alpha, \beta \in D$ сходится ряд $\sum x_{ij} \alpha_i \beta_j$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Ряд $\sum x_{ij}$ называется *безусловно сходящимся*, если для любых перестановок натурального ряда π и σ сходится ряд $\sum x_{\pi(i), \sigma(j)}$.

Следующее утверждение характеризует совершенную сходимость в терминах линейных операторов.

ТЕОРЕМА 1. Для двойного ряда $\sum x_{ij}$ в банаховом пространстве X следующие условия эквивалентны: (А) ряд сходится совершенно, (В) вектор-

¹Результаты настоящей заметки получены при поддержке Международного научного фонда, грант №V9N000.

нозначная матрица $A = (x_{ij})$ порождает линейный компактный оператор $A: c_0 \rightarrow \text{Perf}(X)$, действующий по правилу $Ae_j = \{x_{ij}\}_{i=1}^\infty$, $j \in \mathbb{N}$, где (e_j) — канонический базис пространства c_0 . Норма этого оператора равна

$$M(A) = \sup \left\{ \left\| \sum x_{ij} \alpha_i \beta_j \right\| : \alpha, \beta \in D \right\}. \quad (1)$$

Две другие теоремы описывают связь между совершенной, безусловной и абсолютной сходимостью двойных рядов.

ТЕОРЕМА 2. *Двойной ряд сходится совершенно в том и только том случае, если он сходится безусловно.*

ТЕОРЕМА 3. *Существуют двойные числовые ряды, сходящиеся совершенно, но не абсолютно.*

Эскиз ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Требуемый пример мы построим из «блоков» — отнормированных соответствующим образом матриц Уолша. Напомним, что матрицей Уолша W_n , $n \in \mathbb{N}$, называется ортогональная матрица порядка $m = 2^n$, все элементы которой равны ± 1 . Последовательность матриц Уолша можно определить по индукции:

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} W_1 & W_1 \\ W_1 & -W_1 \end{pmatrix} \quad \text{и т. д.}$$

Сумма абсолютных величин элементов матрицы Уолша равна $N(W_n) = m^2$. Функционал (1) допускает оценку $M(W_n) \leq m^{3/2}$. Введем теперь матрицы $A_n = m^{-2} W_n$. Ясно, что $N(A_n) = 1$ и $M(A_n) \leq 1/\sqrt{m}$. Образует бесконечную матрицу $A = (a_{ij})$, поставив на ее диагонали матрицы A_n и положив все остальные элементы равными нулю. Двойной ряд, порожденный этой матрицей, сходится совершенно ($M(A) \leq \sqrt{2} + 1$), но не абсолютно ($N(A) = \infty$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 и теорема 3 остаются верными, если в определении 1 отбросить условия (а) и (б). Однако теорема 2 при этом окажется неверной. Соответствующий пример — двойной ряд $\sum a_{ij}$, где

$$a_{1j} = (-1)^j, \quad a_{2j} = -a_{1j}, \quad a_{ij} = 0 \quad \text{при } i > 2, \quad j \in \mathbb{N}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Несовпадение безусловной и абсолютной сходимости для числовых двойных рядов отчасти «компенсируется» следующим утверждением: если ряд $\sum a_{ij}$ безусловно сходится, то сходится ряд $\sum a_{ij}^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kadets V. M., Kadets M. I. Rearrangements of Series in Banach Spaces. Transl. Math. Monographs, Vol. 86, Am. Math. Soc., 1991.

Харьковская государственная академия
городского хозяйства

Поступило в редакцию
26 августа 1994 г.