Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Карабегов, О деформационном квантовании на кэлеровом многообразии, связанном с квантованием Березина, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 2, 87–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa528>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:55:15

УДК 517.9

О деформационном квантовании на кэлеровом многообразии, связанном с квантованием Березина

© 1996. А. В. КАРАБЕГОВ

За последние годы появилась серия работ [1–4], в которых изучается деформационное квантование на некоторых классах кэлеровых многообразий, возникающее из квантования Ф. А. Березина [5]. На произвольном симплектическом многообразии деформационное квантование, введенное в [6], может быть построено многими различными способами (см. [7–9]). В настоящей заметке мы приводим конструкцию деформационного квантования на произвольном кэлеровом многообразии, пользуясь подходом Б. В. Федосова [9], и показываем, как такое квантование связано с квантованием Березина. Во всех случаях, рассмотренных в [1–4], деформационное квантование совпадает с построенным в данной работе.

1. Приведем необходимые определения. Деформационным квантованием на симплектическом многообразии M называется структура ассоциативной алгебры в пространстве формальных степенных рядов $\mathcal{F} = C^\infty(M)[[\nu]]$, умножение $\star$ в которой задается последовательностью бидифференциальных операторов $\{C_r(\cdot, \cdot)\}$, $r = 0, 1, \dots$, а именно $f \star g = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r C_r(f, g)$ для $f, g \in \mathcal{F}$. При этом

$$C_0(f, g) = fg, \quad C_1(f, g) - C_1(g, f) = i\{f, g\}, \quad (1)$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ — скобка Пуассона на M , очевидным образом распространенная на $\mathcal{F}$.

(Специальное) квантование в смысле Ф. А. Березина на M задается семейством ассоциативных алгебр $\mathcal{A}_\hbar \subset C^\infty(M)$, где параметр $\hbar$ пробегает некоторое множество положительных чисел E , имеющее 0 в качестве предельной точки. Затем в прямом произведении $\prod_{\hbar \in E} \mathcal{A}_\hbar$ с покомпонентным умножением $\star$ выбирается подалгебра $\mathcal{U}$, такая, что для любого элемента $f = f(\hbar) \in \mathcal{U}$, где $f(\hbar) \in \mathcal{A}_\hbar$, существует предел $\lim_{\hbar \rightarrow 0} f(\hbar) = \varphi(f) \in C^\infty(M)$. При этом должен выполняться принцип соответствия: для $f, g \in \mathcal{U}$

$$\varphi(f \star g) = \varphi(f)\varphi(g), \quad \varphi(\hbar^{-1}(f \star g - g \star f)) = i\{\varphi(f), \varphi(g)\}. \quad (2)$$

Нетрудно дополнить определение квантования в смысле Березина так, чтобы связать с ним некоторое деформационное квантование. Предположим, что алгебра $\mathcal{U}$ выбрана таким образом, что ее элементы $f = f(\hbar)$ допускают разложение в асимптотический ряд по $\hbar \rightarrow 0$ с коэффициентами из $C^\infty(M)$, $f \sim \sum_{r=0}^{\infty} \hbar^r f_r$. Определим отображение $\psi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$, полагая $\psi(f) = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r f_r$. Мы будем говорить, что квантование Березина ассоциировано с деформационным квантованием (т.е. со структурой алгебры) в $\mathcal{F}$, если ψ — гомоморфизм алгебр. При этом выполнение принципа соответствия (2) будет следовать из (1).

2. Определим теперь деформационное квантование на произвольном кэлеровом многообразии. Пусть M — кэлерово многообразие, $\dim_{\mathbb{R}} M = 2m$, и ω

— кэлерова форма на M . Для каждой окрестности $U \subset M$ положим $\mathcal{F}(U) = C^\infty(U)[[\nu]]$. В $\mathcal{F}(U)$ определено действие формальных рядов дифференциальных операторов. Пусть U — координатная окрестность с координатами $z = (z_1, \dots, z_m)$, в которой определен потенциал $\Phi = \Phi(z, \bar{z})$ кэлеровой формы ω , т.е. $\omega = i\partial\bar{\partial}\Phi$. Обозначим через $\mathcal{L}(U)$ множество формальных рядов дифференциальных операторов, коммутирующих (i) с операторами умножения на антиголоморфные функции $\beta(\bar{z})$ и (ii) с операторами $\partial\Phi/\partial\bar{z}_k + \nu\partial/\partial\bar{z}_k$, $k = 1, \dots, m$. Условие (i) означает, что оператор $A \in \mathcal{L}(U)$ можно записать в виде $A = \sum_r \nu^r a_r(z, \bar{z}, \partial/\partial z)$, где a_r — дифференциальные операторы. Поэтому $A = A(\bar{z})$ можно считать антиголоморфным сечением тривиального расслоения над U , слоем которого является пространство формальных рядов (чисто) голоморфных дифференциальных операторов на U . Условие (ii) означает, что A — ковариантно постоянное сечение относительно плоской связности $\nabla = \bar{\partial} + (1/\nu)[\bar{\partial}\Phi, \cdot]$. Легко видеть, что ∇ зависит только от кэлеровой формы ω . Пользуясь техникой, развитой Б. В. Федосовым в [9], можно доказать, что справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Для любого элемента $f \in \mathcal{F}(U)$ существует единственный оператор $A \in \mathcal{L}(U)$ со свободным членом f , т.е. такой, что $f = A1$.*

Оператор A , упомянутый в теореме, обозначим через L_f . Поскольку операторы из $\mathcal{L}(U)$ образуют алгебру и биективно соответствуют элементам из $\mathcal{F}(U)$, то в $\mathcal{F}(U)$ индуцируется ассоциативное умножение $\star: f \star g = L_f L_g 1 = L_f g$ для $f, g \in \mathcal{F}(U)$. Из доказательства теоремы 1 можно также получить, что умножение $\star$ задается бидифференциальными операторами $C_r = c_r(z, \bar{z}, \partial/\partial\bar{z} \otimes \partial/\partial z)$, $r = 0, 1, \dots$, для которых справедливы соотношения (1). Кроме того, операторы C_r на всех окрестностях U согласованы и, таким образом, задают деформационное квантование глобально на M .

3. Теперь мы свяжем с голоморфным эрмитовым линейным расслоением на кэлеровом многообразии (M, ω) квантование по Березину на M при условии, что выполнены некоторые технические требования, легко проверяемые на конкретных примерах. Пусть $\pi: L \rightarrow M$ — голоморфное линейное расслоение с эрмитовой метрикой h , такое, что кривизна канонической связности на нем равна $i\omega$. Сечению $s \in \Gamma(L)$ отвечает функция η_s на главном расслоении $L^\times = L \setminus \{0\}$, такая, что $\eta_s(q)q = s(\pi(q))$ для $q \in L^\times$. Она однородна порядка -1 относительно растяжений $q \mapsto tq$, $t \in \mathbb{C}^*$. Метрику h также можно рассматривать как функцию на $L^\times$, причем $h(tq) = |t|^2 h(q)$. Сечения расслоения L^n отождествим с однородными порядка $-n$ функциями на $L^\times$. Введем на таких функциях эрмитово скалярное произведение. Для функций η_1, η_2 порядка однородности $-n$ пусть τ — функция на M , такая, что $\tau \circ \pi = \eta_1 \bar{\eta}_2 h^n$; тогда положим $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_n = \int \tau \omega^m / m!$. Обозначим через H_n гильбертово пространство голоморфных сечений расслоения L^n со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$. Для всякого $q \in L^\times$ в H_n существует элемент $e_q^{(n)}$ (когерентное состояние), такой, что $\langle \eta, e_q^{(n)} \rangle_n = \eta(q)$ для $\eta \in H_n$. Расслоение L регулярно в смысле Ронсли, если для всех n функция Ронсли ϵ на M , определяемая равенством $\epsilon(\pi(q)) = \langle e_q^{(n)}, e_q^{(n)} \rangle_n h^n(q)$, постоянна. Это условие автоматически выполня-

ется, если на расслоении $L^\times$, транзитивно переставляя слои, действует группа голоморфных автоморфизмов, сохраняющих h (см. [1]). Ковариантным символом оператора A в H_n называется функция σA на M , определяемая равенством $\sigma A(\pi(q)) = \langle A e_q^{(n)}, e_q^{(n)} \rangle_n / \langle e_q^{(n)}, e_q^{(n)} \rangle_n$. Пусть $\mathcal{D}$ — алгебра голоморфных однородных порядка 0 относительно растяжений дифференциальных операторов на $L^\times$, таких, что ограничения этих операторов на функции порядка однородности $-n$ задают замкнутые операторы в H_n , содержащие в области определения все когерентные состояния $e_q^{(n)}$. Ограничение оператора $A \in \mathcal{D}$ на H_n обозначим через $A^{(n)}$. Операторы $A^{(n)}$, $A \in \mathcal{D}$, биективно соответствуют своим ковариантным символам; поэтому множество $\mathcal{A}_{1/n}$ всех таких символов является алгеброй относительно умножения, унаследованного из умножения операторов. Мы зададим сейчас алгебру $\mathcal{U}$ на M из п. 1. Пусть $E = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$. Алгебру $\mathcal{U}$ определим как совокупность элементов $f = f(\hbar) \in \prod_{\hbar \in E} \mathcal{A}_\hbar$, таких, что $f(1/n) = \sum_k n^{-d_k} \sigma A_k^{(n)}$, где $A_k \in \mathcal{D}$ — оператор порядка не выше d_k . Пусть теперь L регулярно в смысле Ронсли, $(\mathcal{F}, \star)$ — деформационное квантование на M , введенное в п. 2, и ψ — отображение, введенное в п. 1.

ТЕОРЕМА 2. *Отображение $\psi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$ корректно определено и является гомоморфизмом алгебр.*

Доказательство теоремы основано на формуле для символа оператора $A^{(n)}$, $A \in \mathcal{D}$: $\sigma A^{(n)} \circ \pi = \hbar^n (A \hbar^{-n})$.

Таким образом, на M возникает квантование Березина, ассоциированное с деформационным квантованием, введенным в п. 2. В работах [1–4] рассматриваются случаи, когда M — обобщенное многообразие флагов или ограниченная симметрическая область. В обоих случаях группа Ли G голоморфных изометрических автоморфизмов многообразия M действует на $L^\times$, сохраняя метрику h . В качестве $\mathcal{D}$ можно взять алгебру дифференциальных операторов на $L^\times$, порожденных инфинитезимальным действием алгебры Ли $\text{Lie}(G)$. Нетрудно показать, что при этом отображение ψ однозначно задает деформационное квантование на $\mathcal{F}$.

Автор пользуется случаем выразить благодарность Б. В. Федосову и Дж. Ронсли, ознакомившим его с препринтами своих работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rawnsley J., Cahen M., Gutt S. J. Geom. Phys., **7**, 45–62 (1990).
2. Cahen M., Gutt S., Rawnsley J. Trans. Amer. Math. Soc., **337**, 73–98 (1993).
3. Cahen M., Gutt S., Rawnsley J. Lett. Math. Phys., **30**, 291–305 (1994).
4. Cahen M., Gutt S., Rawnsley J. To appear in Lett. Math. Phys.
5. Березин Ф. А. Изв. АН СССР, сер. матем., **38**, 1116–1175 (1974).
6. Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerovich A., Sternheimer D. Ann. Phys., **111**, 61–151 (1977).
7. De Wilde M., Lecomte P. Lett. Math. Phys., **7**, 487–496 (1983).
8. Omori H., Maeda Y., Yoshioka A. Adv. Math., **85**, 224–255 (1991).
9. Fedosov B. V. J. Diff. Geom., **40**, 213–238 (1994).