Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Треногин, Локально обратимые операторы
и метод продолжения по параметру, *Функц. ана-
лиз и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 2, 93–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa530>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-
тельским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 11:18:53

ЛИТЕРАТУРА

1. Альбеверио С., Гестези Ф., Хезг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. Мир, М., 1991.
2. *Gesztezy F., Kirsh W.* J. Reine Angew. Math., **362**, 28–50 (1985).
3. Михайлец В. А. ДАН, **335**, №4, 421–423 (1994).
4. Функциональный анализ (под ред. С. Г. Крейна). Наука, М., 1972.
5. Гейтман М. М., Станкевич И. В. Функци. анализ и его прил., **11**, вып. 1, 61–62 (1977).
6. *Christ C., Stolz G.* J. Math. Anal. Appl., **184**, No. 3, 491–516 (1994).
7. *Simon B., Spencer Th.* Commun. Math. Phys., **125**, 113–125 (1989).
8. Шилов Г. Е., Фань Дык Тинь. Интеграл, мера и производная на линейных пространствах. Наука, М., 1967.
9. Кочубей А. Н. Укр. матем. ж., **41**, №10, 1391–1394 (1989).
10. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. Мир, М., 1972.
11. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Изд-во ЛГУ, Л-д, 1980.

Институт математики НАН Украины, Киев
e-mail: mikhai@cksr.ac.bialystok.pl

Поступило в редакцию
25 февраля 1995 г.

УДК 517.988

Локально обратимые операторы и метод продолжения по параметру

© 1996. В. А. ТРЕНОГИН

Если для любых двух точек x_1, x_2 множества $\mathcal{D}$ задано неотрицательное число $\rho(x_1, x_2)$, удовлетворяющее аксиомам тождества и симметрии, то пару $(\mathcal{D}, \rho)$ назовем слабо метрическим пространством. При этом ρ назовем слабой метрикой в $\mathcal{D}$. Все основные понятия теории метрических пространств переносятся на слабо метрическое пространство. Пусть $(\mathcal{D}, \rho)$ — слабо метрическое пространство, а Y — нормированное пространство. Обозначим через $L_\rho(\mathcal{D}, Y)$ множество всех операторов $F: \mathcal{D} \rightarrow Y$, для которых конечна ρ -полунорма

$$\|F\|_\rho = \sup_{x_1, x_2 \in \mathcal{D}, x_1 \neq x_2} \frac{\|Fx_1 - Fx_2\|}{\rho(x_1, x_2)}. \quad (1)$$

С естественными операциями сложения операторов и умножения оператора на число $L_\rho(\mathcal{D}, Y)$ является линейным полунормированным пространством. При этом операторы из $L_\rho(\mathcal{D}, Y)$ ρ -непрерывны и ρ -ограничены, т.е. непрерывны и ограничены в смысле полунормы (1). Для каждого оператора $G: \mathcal{D} \rightarrow Y$ и любой слабой метрики ρ введем числовую характеристику

$$\|G\|_\rho = \inf_{x_1, x_2 \in \mathcal{D}, x_1 \neq x_2} \frac{\|Gx_1 - Gx_2\|}{\rho(x_1, x_2)}, \quad (2)$$

которую назовем ρ -мерой коэрцитивности оператора G .

Отметим, что если $\|G\|_\rho > 0$ хотя бы для одной слабой метрики ρ , то G является мономорфизмом на $\mathcal{D}$. Нетрудно также проверить, что если Y — банахово пространство, а $(\mathcal{D}, \rho)$ — слабо метрическое и ρ -полное пространство,

то из $\|G\|_\rho > 0$, $G \in L_\rho(\mathcal{D}, Y)$, следует, что множество значений $R(G)$ оператора G замкнуто в Y . Непосредственно из (1) и (2) следует такое предложение:

ЛЕММА 1. *Для любых $G: \mathcal{D} \rightarrow Y$ и $F \in L_\rho(\mathcal{D}, Y)$ справедливо ослабленное неравенство треугольника:*

$$\|G + F\|_\rho \leq \|G\|_\rho + \|F\|_\rho.$$

Пусть теперь и всюду ниже Y — банахово пространство, $A: \mathcal{D} \rightarrow Y$, $\|A\|_\rho > 0$ и шар $S_0 = \overline{S_{r_0}(y_0)}$ лежит в $R(A)$. Из этих условий следует, что уравнение $Ax = y$ для любых $y \in S_0$ имеет в $\mathcal{D}$ единственное решение. Ниже будет показано, что аналогичным свойством обладает каждый оператор B , достаточно близкий к A в смысле полунормы (1) и, кроме того, близкий к A по норме пространства Y в точке $x_0 = A^{-1}y_0$. Этот результат при $R(A) = Y$ восходит к Банаху [1], см. также [2, 3]. Методом продолжения по параметру [3–8] подобные свойства обратимости в ряде случаев будут установлены и для операторов, относительно далеких от A .

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $B, A \in L_\rho(\mathcal{D}, Y)$ и $\|B - A\|_\rho < \|A\|_\rho$. Тогда $\|B\|_\rho > 0$ и $S_{r_1}(y_1) \subset R(B)$, где $y_1 = Bx_0$, $r_1 = (1 - q)r_0$, а $q = \|B - A\|_\rho \|A\|_\rho^{-1}$.*

Доказательство следует из леммы 1 и принципа сжимающих отображений.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если в условиях теоремы 1 для некоторого $\theta \in [0, 1]$ выполнено неравенство $\|Bx_0 - y_0\| \leq (1 - q)\theta r_0$, то $S_r(y_0) \subset R(B)$, где $r = (1 - q)(1 - \theta)r_0$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $\|A\|_\rho > 0$ и $R(A) = Y$. Если $B, A \in L_\rho(\mathcal{D}, Y)$, $\|B - A\|_\rho < \|A\|_\rho$, то $\|B\|_\rho > 0$ и $R(B) = Y$.*

Введем теперь оператор-функцию $A(t)$, $t \in [0, 1]$, и положим $A(0) = A$, $A(1) = B$. Назовем ее ρ -непрерывной на $[0, 1]$, если она непрерывна на $[0, 1]$ по полунорме в $L_\rho(\mathcal{D}, Y)$, т.е. $A(t) \in L_\rho(\mathcal{D}, Y)$ и $\|A(t) - A(t_0)\|_\rho \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$ для любых $t, t_0 \in [0, 1]$. Оператор-функцию $A(t)$ назовем ρ -коэрцитивной на $[0, 1]$, если

$$\inf_{[0, 1]} \|A(t)\|_\rho = \gamma > 0. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть оператор-функция $A(t)$ ρ -непрерывна и ρ -коэрцитивна на $[0, 1]$, и $A(t)x_0 = y_0$ при $x_0 = A^{-1}y_0$ для всех $t \in [0, 1]$. Тогда $\|B\|_\rho > 0$ и существует $r_1 > 0$, такое, что $S_{r_1}(y_0) \subset R(B)$. Если $R(A) = Y$, то и $R(B) = Y$. В этом случае условие $A(t)x_0 = y_0$ излишне.*

Доказательство проводится по схеме [3, п. 14.3].

Оператор-функцию $A(t)$ назовем ρ -липшиц-непрерывной на $[0, 1]$ с постоянной δ , если

$$\sup_{t_1, t_2 \in [0, 1], t_1 \neq t_2} \frac{\|A(t_1) - A(t_2)\|_\rho}{|t_1 - t_2|} = \delta. \quad (4)$$

Абстрактную функцию $A(t)x_0$ назовем липшиц-непрерывной на $[0, 1]$ с постоянной β , если

$$\sup_{t_1, t_2 \in [0, 1], t_1 \neq t_2} \frac{\|A(t_1)x_0 - A(t_2)x_0\|}{|t_1 - t_2|} = \beta.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть оператор-функция $A(t)$ на $[0, 1]$ ρ -коэрцитивна с постоянной γ и ρ -липшиц-непрерывна с постоянной δ , а абстрактная функция $A(t)x_0$ липшиц-непрерывна с постоянной β на $[0, 1]$. Пусть $\alpha = \delta\gamma^{-1}$. Тогда если для некоторого натурального m выполнены неравенства

$$m > \alpha, \quad \beta \left(1 + \frac{m-1}{m} \alpha\right) < \left(1 - \frac{\alpha}{m}\right)^m \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m-1} r_0, \quad (5)$$

то $S_{r_l}(y_0) \subset R(A(t))$ для любого $t \in (t_{l-1}, t_l]$, где

$$t_l = l/m, \quad r_l = (1 - \alpha/m)^m (1 - 1/m)^m r_0, \quad l = 1, \dots, m.$$

Доказательство основано на применении следствия 1 теоремы 1 последовательно к парам операторов $A(t)$, $t \in (t_{l-1}, t_l]$, и $A(t_{l-1})$, $l = 1, \dots, m$. При этом используется оценка $\|A(t)x(t_0)\| \leq \beta(1 + \alpha t_0)|t - t_0|$, справедливая для решения $x(t_0)$ уравнения $A(t_0)x = y_0$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия теоремы 3, но вместо неравенства (5) выполнено неравенство $\beta < (\alpha+1)^{-1}e^{-(\alpha+1)}r_0$. Тогда утверждение теоремы 3 справедливо для любого $m > \alpha$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. В условиях теорем 3 и 4 для любого $t \in [0, 1]$ при $r = e^{-(\alpha+1)}r_0$ справедливо включение $\overline{S_r(y_0)} \subset R(A(t))$. Если $\beta = 0$, то можно взять $r = e^{-\alpha}r_0$.

2. Если $A(t) = A + t(B - A)$, то условия липшиц-непрерывности выполнены. При этом $\delta = \|B - A\|_\rho$, $\beta = \|Bx_0\|$. Здесь очевидна роль ограничений малости на β . Если, например, $R(A)$ ограничена в Y , а $Bx = Ax + c$, то при достаточно большой $\|c\|$ уравнение $A(t)x = y_0$ не будет иметь решений на всем $[0, 1]$.

3. Пусть оператор $F(x, t)$ отображает $\mathcal{D} \times (\alpha, \beta)$ в банахово пространство Y и $F(x_0, t_0) = y_0$. Введем оператор-функцию $A(t)$ по формуле $A(t)x = F(x, t)$. Перефразировка вышеизложенного приводит к новым локальным и глобальным теоремам о неявных операторах, т.е. к теоремам о решении уравнения $F(x, t) = y$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Banach S. Studia Math., **1**, 223–240 (1929).
2. Donden A. Rev. Math. Pure Appl., **25**, No. 10, 1459–1475 (1980).
3. Треногин В. А. Функциональный анализ. Наука, М., 1993 (первое изд., 1980).
4. Bernstein S. N. Math. Ann., **59**, 20–76 (1904).
5. Schauder J. Math. Z., **38**, 257–282 (1934).
6. Давиденко Д. Ф. Укр. матем. ж., **7**, №1, 18–28 (1955).
7. Fonarev A. A. Abstr. Am. Math. Soc., **4**, No. 1, 133 (1983).
8. Гапоненко Ю. Л. Журнал выч. матем. и матем. физики, **26**, №8, 1123–1131 (1986).