Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Гельфонд, Комбинаторные коэффициенты
и смешанный объем многогранников, *Функц. ана-
лиз и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 3, 77–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa532>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-
тельским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:51:05

УДК 517.55

Комбинаторные коэффициенты и смешанный объем многогранников

© 1996. О. А. Гельфонд¹

Недавно выяснилось, что системы из n алгебраических уравнений в $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ с достаточно общими многогранниками Ньютона ведут себя неожиданно просто. Для таких систем удается построить явную теорию исключений [1], в которой центральную роль играют *комбинаторные коэффициенты* вершин суммы многогранников Ньютона. В настоящей заметке приведена явная формула для комбинаторных коэффициентов, справедливая при некоторых почти всегда выполненных дополнительных ограничениях на наборы многогранников. При этих же условиях на многогранники доказана гипотетическая формула [1] для смешанного объема развернутых многогранников, полученная в [1] для развернутых наборов целочисленных многогранников средствами алгебраической геометрии. Отметим, что А. Г. Хованский доказал эту формулу в наиболее общем случае, однако его доказательство более сложно.

1. Комбинаторный коэффициент. Пусть в $\mathbb{R}^n$ задан упорядоченный набор выпуклых многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ и Δ — их сумма в смысле Минковского. Грань $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_n$ многогранника-суммы Δ называется *запертой*, если среди ее слагаемых $\Gamma_i \subset \Delta_i$ есть хотя бы одна вершина. Набор многогранников называется *развернутым*, если все грани многогранника-суммы заперты.

Рассмотрим непрерывное отображение $F: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = (f_1, \dots, f_n)$, каждая компонента f_i которого неотрицательна и равна нулю на тех и только тех гранях, для которых слагаемое Γ_i является вершиной многогранника Δ_i . Если набор многогранников развернут, то ограничение $\tilde{F}$ отображения F на границу многогранника переводит окрестность каждой вершины в окрестность точки нуль на границе положительного октанта, причем в нуль переходят только вершины многогранника.

Комбинаторным коэффициентом k_v вершины v многогранника Δ называется [1] локальная степень роста отображения $\tilde{F}: (\partial\Delta, v) \rightarrow (\partial\mathbb{R}_+^n, 0)$. Комбинаторный коэффициент зависит лишь от выбора ориентаций многогранника-суммы и положительного октанта (и не зависит от выбора отображения F).

Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ — упорядоченный набор развернутых многогранников и Δ — их сумма. Предположим, что для каждой $(n-1)$ -мерной грани $\Gamma \subset \Delta$ ($\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_n$, $\Gamma_i \subset \Delta_i$), такой, что слагаемое Γ_n является вершиной, набор многогранников $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ развернут. Ориентируем грань Γ согласованно с ориентацией границы многогранника Δ . В этом предположении определен комбинаторный коэффициент $k_\Gamma(a)$ каждой вершины a суммы $\tilde{\Gamma}$ ($\Gamma = \tilde{\Gamma} + v_n$; $v_n = \Gamma_n$) упорядоченного набора ориентированных многогранников $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$. Легко видеть, что в этих предположениях справедлива

ЛЕММА 1. *Комбинаторный коэффициент вершины $v = a + v_n$ многогранника Δ равен умноженной на $(-1)^n$ сумме комбинаторных коэффициентов $k_\Gamma(a)$ по всем $(n-1)$ -мерным граням Γ многогранника Δ , n -е слагаемое*

¹Работа выполнена при поддержке МНФ, грант MBF000, и РФФИ, грант 95-01187-01.

которых — вершина v_n .

ЗАМЕЧАНИЕ. Ориентируем $(n - 1)$ -мерные грани многогранника Δ по следующему правилу. Если к ориентирующему реперу $e_1, \dots, e_{n-1}$ грани Γ добавить внутреннюю нормаль $-n_\Gamma$ грани Γ , то получится ориентирующий репер $e_1, \dots, e_{n-1}, -n_\Gamma$ пространства $\mathbb{R}^n$. При таком выборе ориентаций граней многогранника в формулировке леммы пропадает множитель $(-1)^n$.

Рассмотрим полный флаг $\Gamma^0 \subset \dots \subset \Gamma^{n-1} \subset \Gamma^n = \Delta$ вложенных граней многогранника-суммы Δ , где $\Gamma^m \subset \mathbf{K}$ есть m -мерная грань многогранника Δ . Сопоставим флагу знак плюс, если репер, составленный из векторов, выходящих из Γ^0 и кончающихся строго внутри различных граней Γ^i , задает положительную ориентацию в $\mathbb{R}^n$, и знак минус в противном случае.

Назовем полный флаг граней $\Gamma^0 \subset \dots \subset \Gamma^{n-1} \subset \Gamma^n = \Delta$ *правильным*, если i -е слагаемое Γ_i^m грани Γ^m для любых $0 \leq m < i \leq n$ является вершиной ($\Gamma^m = \Gamma_1^m + \dots + \Gamma_n^m$, где $\Gamma_i^m \subset \Delta_i$).

Упорядоченный набор n развернутых многогранников назовем *индуктивно развернутым*, если для каждого положительного $m < n$ из того, что все $n - m$ последних слагаемых m -мерной грани Γ^m многогранника-суммы являются вершинами, следует, что набор первых m слагаемых этой грани развернут.

ТЕОРЕМА 1. Комбинаторный коэффициент вершины v суммы индуктивно развернутого набора многогранников равен числу подсчитанных с учетом знака правильных флагов, содержащих v в качестве нульмерной грани.

Доказательство проводится индукцией по размерности при помощи леммы 1 и замечания, следующего после нее.

2. Смешанный объем индуктивно развернутого набора многогранников. В ориентированном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ определена функция $\det(v_1, \dots, v_n)$, сопоставляющая упорядоченному набору векторов $v_1, \dots, v_n$ ориентированный объем натянутого на них параллелепипеда. Будем считать, что пространство $\mathbb{R}^n$ является евклидовым и ориентированным.

ТЕОРЕМА 2. Для смешанного объема $V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ индуктивно развернутого набора многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_n \subset \mathbb{R}^n$ справедлива формула

$$n! V(\Delta_1, \dots, \Delta_n) = (-1)^n \sum_v \mathbf{k}_v \det(v_1, \dots, v_n),$$

в которой суммирование ведется по всем вершинам $v \in \Delta$ многогранника $\Delta = \Delta_1 + \dots + \Delta_n$, $\mathbf{k}_v$ — комбинаторный коэффициент, v_i — вершины многогранников Δ_i , такие, что $v_1 + \dots + v_n = v$.

Доказательство проводится индукцией по размерности и опирается на индукционную формулу для смешанного объема [2] и лемму 1.

Пусть Γ есть $(n - 1)$ -мерная ориентированная грань многогранника Δ , $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_{n-1} + \Gamma_n$, $\Gamma_i \subset \Delta_i$, причем слагаемое Γ_n является вершиной v_n многогранника Δ_n . Тогда $\tilde{\Gamma} = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_{n-1}$ является $(n - 1)$ -мерной гранью многогранника-суммы $\tilde{\Delta}$ многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$. Предположим, что многогранник Δ_n параллельно перенесен так, что вектор v_n стал трансверсален грани Γ . При параллельных переносах многогранников смешанный объем и комбинаторные коэффициенты не меняются, а все определители меняются непрерывно. Поэтому формулу достаточно доказать для почти всех параллельных переносов.

Спроектируем грани $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ вдоль вектора v_n на содержащую точку нуль гиперплоскость L_Γ , параллельную грани Γ . Ориентируем L_Γ в соответствии с ориентацией грани Γ .

По предположению индукции в $(n-1)$ -мерном пространстве формула справедлива. Применим ее для набора сдвинутых в гиперплоскость L_Γ многогранников $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$. Тогда из [2] и леммы 1 следует, что формула справедлива и в n -мерном пространстве в случае, когда векторы v_n трансверсальны соответствующим плоскостям L_Γ .

В заключение я хочу поблагодарить Б. Я. Казарновского и А. Г. Хованского за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфонд О. А., Хованский А. Г. Вычеты Гротендика и многогранники Ньютона. Докл. РАН (в печати). 2. Бураго Д. М., Залгаллер В. А. Геометрические неравенства. Наука, Л., 1980.

Институт системных исследований РАН

Поступило в редакцию
25 декабря 1995 г.

УДК 513.88

Двойственные представления выпуклых тел и их поляр

© 1996. В. Л. Левин

1. Везде далее E — вещественное отделимое локально выпуклое пространство и E^* — сопряженное к нему пространство. Выпуклым телом называется такое замкнутое выпуклое множество C в E , что $C \neq E$ и 0 — его внутренняя точка. Множество граничных точек множества C обозначается через $b(C)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть C — выпуклое тело в E , $x \in b(C)$ и $x' \in E^* \setminus \{0\}$. Замкнутая гиперплоскость

$$H(x, x') := \{y \in E : \langle y, x' \rangle = \langle x, x' \rangle\}$$

называется *опорной* к C в точке x , если C лежит в полупространстве

$$H^{\leq}(x, x') := \{y \in E : \langle y, x' \rangle \leq \langle x, x' \rangle\}$$

или, что равносильно, если $x' \in \mathcal{N}_C(x)$, где

$$\mathcal{N}_C(x) := \{x' \in E^* : \langle y - x, x' \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C\}$$

— нормальный конус множества C в x . Будем считать, не ограничивая общности, что x' нормирован условием $\langle x, x' \rangle = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Опорная гиперплоскость $H(x, x')$ называется *касательной* к C в x , если x' — единственный элемент из $\mathcal{N}_C(x)$, такой, что $\langle x, x' \rangle = 1$. В этом случае x называется *точкой гладкости* множества $b(C)$.

Касательная гиперплоскость и соответствующее касательное полупространство в x обозначаются далее через $H(x)$ и $H^{\leq}(x)$, а множество точек гладкости множества $b(C)$ — через $\Gamma(C)$.