Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Левин, Двойственные представления выпуклых тел и их поляр, *Функци. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 3, 79–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa533>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:20:16

Спроектируем грани $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ вдоль вектора v_n на содержащую точку нуль гиперплоскость L_Γ , параллельную грани Γ . Ориентируем L_Γ в соответствии с ориентацией грани Γ .

По предположению индукции в $(n-1)$ -мерном пространстве формула справедлива. Применим ее для набора сдвинутых в гиперплоскость L_Γ многогранников $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$. Тогда из [2] и леммы 1 следует, что формула справедлива и в n -мерном пространстве в случае, когда векторы v_n трансверсальны соответствующим плоскостям L_Γ .

В заключение я хочу поблагодарить Б. Я. Казарновского и А. Г. Хованского за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфонд О. А., Хованский А. Г. Вычеты Гротендика и многогранники Ньютона. Докл. РАН (в печати). 2. Бураго Д. М., Залгаллер В. А. Геометрические неравенства. Наука, Л., 1980.

Институт системных исследований РАН

Поступило в редакцию
25 декабря 1995 г.

УДК 513.88

Двойственные представления выпуклых тел и их поляр

© 1996. В. Л. Левин

1. Везде далее E — вещественное отделимое локально выпуклое пространство и E^* — сопряженное к нему пространство. Выпуклым телом называется такое замкнутое выпуклое множество C в E , что $C \neq E$ и 0 — его внутренняя точка. Множество граничных точек множества C обозначается через $b(C)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть C — выпуклое тело в E , $x \in b(C)$ и $x' \in E^* \setminus \{0\}$. Замкнутая гиперплоскость

$$H(x, x') := \{y \in E : \langle y, x' \rangle = \langle x, x' \rangle\}$$

называется *опорной* к C в точке x , если C лежит в полупространстве

$$H^{\leq}(x, x') := \{y \in E : \langle y, x' \rangle \leq \langle x, x' \rangle\}$$

или, что равносильно, если $x' \in \mathcal{N}_C(x)$, где

$$\mathcal{N}_C(x) := \{x' \in E^* : \langle y - x, x' \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C\}$$

— нормальный конус множества C в x . Будем считать, не ограничивая общности, что x' нормирован условием $\langle x, x' \rangle = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Опорная гиперплоскость $H(x, x')$ называется *касательной* к C в x , если x' — единственный элемент из $\mathcal{N}_C(x)$, такой, что $\langle x, x' \rangle = 1$. В этом случае x называется *точкой гладкости* множества $b(C)$.

Касательная гиперплоскость и соответствующее касательное полупространство в x обозначаются далее через $H(x)$ и $H^{\leq}(x)$, а множество точек гладкости множества $b(C)$ — через $\Gamma(C)$.

Напомним (см., например, [1]), что полярной множества C называется множество

$$C^0 := \{x' \in E^* : \langle x, x' \rangle \leq 1 \quad \forall x \in C\}.$$

Точка $x'_0 \in C^0$ называется слабо* выступающей, если для некоторого $y \in E$ справедливо неравенство

$$\langle y, x' \rangle < \langle y, x'_0 \rangle \quad \forall x' \in C^0 \setminus \{x'_0\}.$$

В таком случае говорят, что y выделяет точку x'_0 . Множество $\exp C^0$ слабо* выступающих точек множества C^0 содержится в множестве крайних точек этого множества, но в отличие от последнего может оказаться пустым (см. пример ниже).

ТЕОРЕМА 1 (теорема двойственности). *Следующие утверждения о выпуклом теле C равносильны:*

(1) *справедливо представление*

$$C = \bigcap_{x \in \Gamma(C)} H^{\leq}(x); \quad (*)$$

(2) *справедливо представление*

$$C^0 = \text{cl co exp } C^0, \quad (**)$$

где cl co обозначает слабо* замкнутую выпуклую оболочку.

ТЕОРЕМА 2. *Если $\Gamma(C)$ плотно в $b(C)$, то имеют место представления (*) и (**).*

Выделим основные этапы доказательства теоремы 1 в виде трех лемм.

ЛЕММА 1. *Пусть $\Gamma \subseteq b(C)$ и $\xi: \Gamma \rightarrow E^*$ — отображение, такое, что $\xi(x) \in \mathcal{N}_C(x)$ и $\langle x, \xi(x) \rangle = 1$ для любой точки $x \in \Gamma$. Следующие утверждения равносильны:*

(1) *имеет место представление*

$$C = \bigcap_{x \in \Gamma} H^{\leq}(x, \xi(x)); \quad (***)$$

(2) *имеет место представление $C^0 = \text{cl co}(0 \cup \xi(\Gamma))$.*

ЛЕММА 2 (в случае банахова пространства ср. [2, предложение 6.9]). *Пусть $x' \in C^0 \setminus \{0\}$. Следующие утверждения равносильны:*

(а) $x' \in \exp C^0$;

(б) *существует точка $x \in \Gamma(C)$, такая, что $\langle x, x' \rangle = 1$ и $H(x) = H(x, x')$.*

ЛЕММА 3. *Если $C^0 = \text{cl co}\{0 \cup (\exp C^0 \setminus \{0\})\}$ и $0 \notin \text{cl co}(\exp C^0 \setminus \{0\})$, то $0 \in \exp C^0$.*

Теорема 2 вытекает из теоремы 1 и следующей леммы.

ЛЕММА 4. *Пусть C — выпуклое тело, Γ — множество, плотное в $b(C)$, и $\xi: \Gamma \rightarrow E^* \setminus \{0\}$ — отображение, удовлетворяющее условию $\xi(x) \in \mathcal{N}_C(x)$ для любой точки $x \in \Gamma$. Тогда имеет место (***)*.

2. Пусть теперь E — нормированное пространство. Напомним (см. [2]), что банахово пространство E входит в класс GDS пространств со свойством дифференцируемости по Гато, если для каждого открытого выпуклого множества

$U \subseteq E$ и каждой непрерывной выпуклой функции на U точки, где эта функция дифференцируема по Гато, плотны в U . Класс GDS содержит рефлексивные пространства, сепарабельные пространства, пространства с гладкой нормой и пространства, сопряженные к которым допускают строго выпуклую эквивалентную норму [2]. Из соединения теорем 1 и 2 с известными характеристиками класса GDS (см. [2, теорема 6.2 и следствие 6.6]) вытекает следующая

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ В МАССОВОЙ ПОСТАНОВКЕ. Пусть E — банахово пространство. Следующие утверждения равносильны:

- (1) $E \in GDS$;
- (2) для каждого выпуклого тела $C \subset E$ множество $\Gamma(C)$ плотно в $b(C)$;
- (3) каждое выпуклое тело $C \subset E$ допускает представление (*);
- (4) поляр C^0 каждого выпуклого тела $C \subset E$ допускает представление (**).

ЗАМЕЧАНИЕ. Остается открытым вопрос о том, является ли для фиксированного $C \subset E$ плотность множества $\Gamma(C)$ в $b(C)$ необходимым условием справедливости представлений (*) и (**).

В заключение приведем пример выпуклого тела C в сепарабельном нормированном пространстве, для которого множества $\Gamma(C)$ и $\text{exp } C^0$ пусты и, стало быть, представления (*) и (**) не имеют места.

ПРИМЕР. E — нормированное подпространство в l^1 , состоящее из финитных последовательностей, т.е. $x = (x_n) \in E \iff x_n = 0 \ \forall n > n_0(x)$, и C — единичный шар в E . Имеем $E^* = l^\infty$ и для каждого $x \in b(C)$ любой элемент $x' = (x'_n) \in l^\infty$ с $x'_n = \text{sgn}(x_n)$ при $n \in \text{supp } x = \{k : x_k \neq 0\}$ и $|x'_n| \leq 1$ при $n \notin \text{supp } x$ содержится в конусе $\mathcal{N}_C(x)$. Так как таких x' бесконечное множество и для каждого из них $\langle x, x' \rangle = 1$, то $\Gamma(C)$ пусто. Далее, C^0 есть единичный шар в l^∞ , и так как элементы пространства E (финитные последовательности) не выделяют точек шара C^0 , то $\text{exp } C^0$ тоже пусто.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичное рассуждение показывает, что $\Gamma(C) = \emptyset$ и $\text{exp } C^0 = \emptyset$, где C — единичный шар банахова пространства $l^1(J)$ функций $x: J \rightarrow \mathbb{R}$ на несчетном бесконечном множестве J , для каждой из которых $\text{supp } x = \{j \in J : x(j) \neq 0\}$ не более чем счетно и

$$\|x\| := \sum_{j \in \text{supp } x} |x(j)| < +\infty.$$

Можно также привести пример выпуклого тела C , для которого $\Gamma(C)$ и $\text{exp } C^0$ непусты, но представления (*) и (**) не имеют места.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. ИЛ., М., 1959.
2. Phelps R. R. Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability. Springer-Verlag, 1989.

Центральный экономико-математический институт РАН

Поступило в редакцию
6 апреля 1995 г.
В переработанном виде
31 октября 1995 г.