Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 3, 1–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa534>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:42:41

УДК 517.9

Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов

© 1996. А. Г. БАСКАКОВ¹

Пусть X — комплексное банахово пространство и $\text{End } X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X . Символом $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ (или, короче, $\mathcal{F}$) обозначим одно из следующих банаховых пространств: $L_p = L_p(\mathbb{R}, X)$ ($p \in [1, \infty]$) — пространство суммируемых со степенью p (существенно ограниченных при $p = \infty$) измеримых по Бохнеру на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ функций, принимающих значения в X ($\|\cdot\|_p$ — норма в $L_p(\mathbb{R}, X)$), $S_p = S_p(\mathbb{R}, X)$ ($p \in [1, \infty)$) — банахово пространство локально суммируемых со степенью p измеримых на $\mathbb{R}$ функций со значениями в X , для которых конечна величина $\|x\|_{S_p} = \sup_{t \in \mathbb{R}} (\int_0^1 \|x(s+t)\|^p ds)^{1/p}$ ($x \in S_p(\mathbb{R}, X)$), $C = C(\mathbb{R}, X)$ — подпространство непрерывных функций из $L_\infty(\mathbb{R}, X)$ и $C_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$ — подпространство функций из $C(\mathbb{R}, X)$ со свойством $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$, $x \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Рассматривается семейство эволюционных операторов (пропатор) $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(t, s); -\infty < s \leq t < \infty\} \subset \text{End } X$, т.е. предполагаются выполненными следующие условия:

- 1) семейство $\mathcal{U}$ сильно непрерывно на $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : s \leq t\}$;
- 2) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$, $-\infty < \tau \leq s \leq t < \infty$;
- 3) $\mathcal{U}(t, t) = I$ для любого $t \in \mathbb{R}$;
- 4) $\sup_{0 \leq t-s \leq 1} \|\mathcal{U}(t, s)\| = K < \infty$.

Семейству $\mathcal{U}$ сопоставляется линейный оператор

$$\mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}.$$

Его область определения $D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$ определяется так. Функция $x \in \mathcal{F}$ включается в $D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$, если существует функция $f \in \mathcal{F}$, такая, что для почти всех $s \leq t$ из $\mathbb{R}$ имеют место равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t, s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau) d\tau. \quad (1)$$

При этом мы полагаем $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}x = f$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, гранты NZA000 и NZA300, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект 95-01-00032.

Таким образом, $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} = -d/dt + A(t): D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ — абстрактный параболический оператор (см. [1, с. 165]), если $\mathcal{U}$ — семейство эволюционных операторов для линейного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $A(t): D(A(t)) \subset X \rightarrow X$ — семейство замкнутых линейных операторов, порождающих корректную задачу Коши (см. [2]).

Для исследования линейного оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ в данной статье систематически используется полугруппа $\{T_{\mathcal{U}}(t), t \geq 0\}$ разностных операторов из банаховой алгебры $\text{End } \mathcal{F}$ вида

$$(T_{\mathcal{U}}(t)x)(s) = \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), \quad x \in \mathcal{F}, s \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (2)$$

Основные результаты статьи группируются вокруг следующих четырех теорем.

ТЕОРЕМА 1. *Оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы операторов $\{T_{\mathcal{U}}(t), t \geq 0\}$ в любом из банаховых пространств $L_p = L_p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, $C_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$.*

ТЕОРЕМА 2 (теорема об отображении спектра). *Спектр $\sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$ оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ и спектр $\{\sigma(T_{\mathcal{U}}(t))\}$ разностного оператора $T_{\mathcal{U}}$, $t > 0$, связаны соотношением*

$$\sigma(T_{\mathcal{U}}(t)) \setminus \{0\} = \exp \sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})t = \{\exp \lambda t : \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})\}.$$

В частности, оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим разностный оператор $\mathcal{D}_{\mathcal{U}} = I - T_{\mathcal{U}}(1)$, имеющий вид

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}x)(s) = x(s) - \mathcal{U}(s, s-1)x(s-1), \quad x \in \mathcal{F}, s \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Отметим, что утверждение теоремы 2 не имеет места для произвольной сильно непрерывной полугруппы операторов (см. [3, с. 676]).

Символом $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ обозначим одно из следующих банаховых пространств двусторонних последовательностей векторов из банахова пространства X :

$$l_p = l_p(\mathbb{Z}, X) = \left\{ x: \mathbb{Z} \rightarrow X \mid \|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad p \in [1, \infty),$$

$$l_{\infty} = l_{\infty}(\mathbb{Z}, X) = \left\{ x: \mathbb{Z} \rightarrow X \mid \|x\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\| < \infty \right\},$$

$$c_0 = C_0(\mathbb{Z}, X) = \left\{ x \in l_{\infty} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \|x(n)\| = 0 \right\}.$$

В следующей теореме используется пара банаховых пространств $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, X), \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X))$, которая является одной из следующих: (S_p, l_{∞}) , (L_p, l_p) , $p \in [1, \infty)$, (C, l_{∞}) , (C_0, c_0) .

ТЕОРЕМА 3. *Линейный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обратим тогда и только тогда, когда обратим разностный оператор $\mathcal{D}_0: \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$, определяемый равенствами*

$$(\mathcal{D}_0x)(n) = x(n) - \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1), \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X), n \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\{\mathcal{U}(t, s), s \leq t\}$ из алгебры $\text{End } X$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}$ с показателем $\beta > 0$ и коэффициентом $M > 0$, если существует ограниченная сильно непрерывная проекторнозначная функция $P: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X$, такая, что: 1) $\mathcal{U}(t, s)P(s) = P(t)\mathcal{U}(t, s)$ при $t \geq s$ из $\mathbb{R}$; 2) $\|\mathcal{U}(t, s)P(s)\| \leq M \exp(-\beta(t-s))$ при $t \geq s$ из $\mathbb{R}$; 3) при $t \geq s$ сужение $\mathcal{U}(t, s)|_{\text{Im } Q(s)}$ оператора $\mathcal{U}(t, s)$ на образ $\text{Im } Q(s)$ проектора $Q(s) = I - P(s)$ (здесь и далее символом I обозначается тождественный оператор) является изоморфизмом подпространств $\text{Im } Q(s)$ и $\text{Im } Q(t)$ (определим оператор $\mathcal{U}(s, t)$ как обратное отображение из $\text{Im } Q(t)$ в $\text{Im } Q(s)$); 4) $\|\mathcal{U}(t, s)Q(s)\| \leq M \exp \beta(t-s)$ при $s \geq t$ (нормы берутся в $\text{End } X$ и оператор $\mathcal{U}(t, s)Q(s)$ рассматривается как элемент пространства $\text{End } X$).

Если $P = 0$ или $Q = 0$, то говорят, что для $\mathcal{U}$ имеет место тривиальная дихотомия.

ТЕОРЕМА 4. *Имеют место следующие утверждения:*

- 1) *линейный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ обратим тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию;*
- 2) *спектр $\sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$ оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ не зависит от выбора пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.*

Сформулированные результаты были анонсированы в работе [4]. Исследование дифференциальных уравнений с использованием разностных операторов вида (3)–(4) осуществлялось в работах [1, 5–9].

§1. Доказательство основных утверждений

При доказательстве многих результатов используется следующее (вытекающее из равенств (1))

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для любого комплексного числа $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} + \lambda I$ представим в виде $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} + \lambda I = \mathcal{L}_{\mathcal{U}(\lambda)}$, где семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}(\lambda)$ из алгебры $\text{End } X$ имеет вид $\mathcal{U}(\lambda)(t, s) = \exp \lambda(t-s)\mathcal{U}(t, s)$, $s \leq t$.

Непосредственно из определения экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$ следует, что имеет место (см. [1, с. 167]) следующая

ЛЕММА 1. *Пусть семейство $\mathcal{U}$ обладает экспоненциальной дихотомией на $\mathbb{R}$. Тогда линейный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}$ (непрерывно) обратим и обратный $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^{-1} \in \text{End } \mathcal{F}$ определяется формулой*

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^{-1}f)(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t, s)f(s)ds, \quad f \in \mathcal{F}, t \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

где функция Грина $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{End } X$ имеет вид

$$G(t, s) = \begin{cases} -\mathcal{U}(t, s)P(s), & s \leq t, \\ \mathcal{U}(t, s)Q(s), & s > t. \end{cases} \quad (6)$$

Отметим, что для $\mathcal{F} = C$, C_0 в монографии [1, гл. X] установлена эквивалентность обратимости оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ условию экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$.

СЛЕДСТВИЕ. *Существует такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} - \alpha I: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ обратим.*

Для доказательства достаточно заметить, что из свойств 3) и 4) семейства $\mathcal{U}$ следует существование постоянных $C > 0$ и $\beta_0 \in \mathbb{R}$, таких, что $\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq C \exp \beta_0(t-s)$ при $s \leq t$ из $\mathbb{R}$. Если $\alpha > \beta_0$, то в силу замечания 1 имеет место равенство $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} - \alpha I = \mathcal{L}_{\mathcal{U}(-\alpha)}$. Для семейства $\mathcal{U}(-\alpha)$ имеет место тривиальная дихотомия ($\|\mathcal{U}(-\alpha)(t, s)\| \leq C \exp(\beta_0 - \alpha)(t-s)$, $s \leq t$), и поэтому оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} - \alpha I$ обратим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\mathcal{A}$ — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы операторов $\{T_{\mathcal{U}}(t), t \geq 0\}$, определяемой формулой (2). Достаточно доказать, что существует число $\alpha \in \mathbb{R}$, принадлежащее пересечению $\rho(\mathcal{A}) \cap \rho(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$ резольвентных множеств $\rho(\mathcal{A})$ и $\rho(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$ операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ соответственно и такое, что операторы $(\mathcal{A} - \alpha I)^{-1}$, $(\mathcal{L}_{\mathcal{U}} - \alpha I)^{-1}$ совпадают. Существование такого числа α вытекает из следствия леммы 1 и того факта, что $\mathcal{A}$ — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы операторов (см. [3]). Рассматривая, если необходимо, вместо операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ операторы $\mathcal{A} - \alpha I$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} - \alpha I$, без ограничения общности можно далее считать, что $\alpha = 0$, т.е. в этом случае $\|T_{\mathcal{U}}(t)\| = \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\mathcal{U}(s, s-t)\| \leq \text{Const} \exp(-\gamma t)$, $t \geq 0$, для некоторого $\gamma > 0$. Следовательно, для семейства $\mathcal{U}$ имеет место тривиальная дихотомия, и потому из леммы 1 получаем представление

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^{-1}f)(s) = - \int_{-\infty}^s \mathcal{U}(s, \tau) f(\tau) d\tau, \quad f \in \mathcal{F}.$$

С другой стороны, для оператора $\mathcal{A}^{-1}$ имеют место следующие равенства (см. [3, с. 354]):

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^{-1}f)(s) &= - \int_0^{\infty} (T_{\mathcal{U}}(t)f)(s) dt = - \int_0^{\infty} \mathcal{U}(s, s-t) f(s-t) dt \\ &= - \int_{-\infty}^s \mathcal{U}(s, \tau) f(\tau) d\tau = (\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^{-1}f)(s), \quad f \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В следующих двух леммах используется принятое в теореме 3 соглашение относительно пары $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, X), \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X))$ банаховых пространств.

ЛЕММА 2. Из обратимости оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ следует обратимость разностного оператора $\mathcal{D}_0$ (см. формулу (4)), причем имеет место оценка

$$\|\mathcal{D}_0^{-1}\| \leq 1 + 3K + \frac{9}{2} K^2 \|\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^{-1}\|, \quad K = \sup_{0 \leq t-s \leq 1} \|\mathcal{U}(t, s)\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ обратим. Докажем, что оператор $\mathcal{D}_0$ обратим и обратный имеет вид

$$\mathcal{D}_0^{-1}x = \tilde{y} + x, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X),$$

где через $\tilde{y}$ обозначено сужение функции $y = \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^{-1}Bx \in C(\mathbb{R}, X)$ на $\mathbb{Z}$ (включение $D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset C(\mathbb{R}, X)$ следует из равенств (1)) и линейный оператор $B: \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ определен равенствами

$$(Bx)(s) = -\varphi(s) \mathcal{U}(s, n-1)x(n-1), \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad s \in [n-1, n].$$

Здесь $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — периодическая периода 1 функция, причем $\varphi(s) = 6s(1-s)$ для $s \in [0, 1]$. Оператор B корректно определен, ограничен, и $\|B\| \leq \frac{3}{2}K$.

Вначале докажем инъективность оператора $\mathcal{D}_0$. Если $x_0 \in \text{Ker } \mathcal{D}_0 = \{x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X) : \mathcal{D}_0 x = 0\}$, то $x_0(n) = \mathcal{U}(n, n-1)x_0(n-1)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$ и функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, определенная равенствами

$$x(t) = \mathcal{U}(t, n)x_0(n), \quad t \in [n, n+1], \quad n \in \mathbb{Z},$$

принадлежит ядру $\text{Ker } \mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$. Поэтому $x = 0$ и, следовательно, $x_0 = 0$.

Докажем сюръективность оператора $\mathcal{D}_0$. Пусть $g \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$, $f = Bg \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и $x = \mathcal{L}^{-1}f \in D(\mathcal{L}) \subset C(\mathbb{R}, X)$. Тогда из равенств (1) получаем

$$\begin{aligned} x(n) &= \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1) + \int_{n-1}^n \varphi(s) \mathcal{U}(n, s) \mathcal{U}(s, n-1)g(n-1) ds \\ &= \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1) + \mathcal{U}(n, n-1)g(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{D}_0(\tilde{x} + g) = g$, если только будет установлено, что $\tilde{x} \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$. Из равенств (1) следуют оценки

$$\|\tilde{x}(n)\| = \|x(n)\| \leq \frac{3}{2}K(\|x(s)\| + \|g(n-1)\|), \quad s \in [n-1, n], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Поэтому $\tilde{x} \in l_{\infty}(\mathbb{Z}, X)$, если $\mathcal{F} = L_{\infty}$ или $\mathcal{F} = C$, причем $\tilde{x} \in C_0(\mathbb{Z}, X)$ при $\mathcal{F} = C_0(\mathbb{R}, X)$. Из (7) получаем

$$\|\tilde{x}\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\| \leq \frac{3}{2}K(\|x\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}). \quad (8)$$

Пусть теперь $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = L_p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, или $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = S_p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$. Поскольку $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ для любых $a, b \geq 0$, то, интегрируя по отрезку $[n, n+1]$ обе части неравенства (7), возведенные в степень p , получаем неравенства

$$\|x(n)\|^p \leq \frac{1}{2}(3K)^p \left(\int_{n-1}^n \|x(s)\|^p ds + \|g(n-1)\|^p \right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Поэтому при $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = L_p(\mathbb{R}, X)$ имеет место оценка

$$\|\tilde{x}\|_p \leq 3K(\|x\|_p + \|g\|_p). \quad (10)$$

Если $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = S_p(\mathbb{R}, X)$, то из (9) следует, что

$$\|\tilde{x}\|_{\infty} \leq 3K(\|x\|_{S_p} + \|g\|_{\infty}). \quad (11)$$

Таким образом, из оценок (7)–(11) получаем, что при любом выборе пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ функция $\tilde{x}$ принадлежит пространству $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$. Следовательно, оператор $\mathcal{D}_0$ обратим, $\tilde{x} + g = \mathcal{D}_0^{-1}g$ и из приведенных оценок вытекает, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}_0^{-1}g\| &\leq \|\tilde{x}\| + \|g\| \leq 3K(\|x\|_{\mathcal{F}} + \|g\|) + \|g\| \\ &\leq 3K(\|\mathcal{L}^{-1}\| \|B\| \|g\| + \|g\|) + \|g\| = (1 + 3K + \frac{9}{2}K^2\|\mathcal{L}^{-1}\|)\|g\|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Из обратимости разностного оператора $\mathcal{D}_0 \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ следует обратимость оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор $\mathcal{D}_0$ (см. формулу (4)) обратим. Из его инъективности следует инъективность оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ (если $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}x = 0$, то сужение $\tilde{x}$ функции x на $\mathbb{Z}$ принадлежит $\text{Ker } \mathcal{D}_0$; поэтому из равенств $x(t) = \mathcal{U}(t, n)x(n) = 0$ для любого $t \in [n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$, следует, что $x = 0$).

Докажем сюръективность оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$. Для произвольной функции $f \in \mathcal{F}$ рассмотрим функцию $f_d \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ вида $f_d(n) = -\int_n^{n+1} \mathcal{U}(n, \tau)f(\tau) d\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда существует функция $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$, такая, что $\mathcal{D}x_0 = f_d$. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что функция $x \in \mathcal{F}$, определенная на каждом промежутке $[n, n+1]$ ($n \in \mathbb{Z}$) соотношениями

$$x(s) = \mathcal{U}(s, n)x_0(n) - \int_n^s \mathcal{U}(s, \tau)f(\tau) d\tau, \quad s \in [n, n+1],$$

принадлежит $D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}x = f$ (т. е. выполнены равенства (1)). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 непосредственно следует из лемм 2 и 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Достаточность условия экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$ установлена в лемме 1.

Пусть теперь оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ обратим. Из теоремы 3 следует обратимость соответствующего разностного оператора $\mathcal{D}_0 \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$. Из [11, теорема 3] получаем, что оператор $\mathcal{D}_0$ обратим в банаховом пространстве $l_{\infty}(\mathbb{Z}, X)$. Еще раз используя теорему 3, приходим к выводу о том, что оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ обратим в пространстве $C(\mathbb{R}, X)$ и, следовательно, из работы [1, гл. X] получаем, что семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Доказательство необходимости приводимого в теореме 4 условия можно изложить иначе, рассматривая семейство обратимых операторов вида $\{S(\alpha)\mathcal{L}_{\mathcal{U}}S(-\alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$, где $\{S(\alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$ — группа изометрических операторов сдвигов функций из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ ($(S(\alpha)x)(t) = x(t+\alpha)$, $x \in \mathcal{F}$). Из леммы 2 будет следовать равномерная обратимость соответствующего семейства разностных операторов

$$(\mathcal{D}_{\alpha}x)(n) = x(n) - \mathcal{U}(n+\alpha, n+\alpha-1)x(n-1), \quad \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X).$$

Значит, они допускают дискретную экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}$ (см. [6, с. 250]). Экспоненциальная дихотомия семейства $\mathcal{U}$ будет следовать из [6, с. 251].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из теоремы 3 статьи [11] следует, что доказательство теоремы достаточно провести для случая, когда $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ совпадает с одним из банаховых пространств $L_p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, $C_0(\mathbb{R}, X)$, на которых полугруппа $\{T_{\mathcal{U}}(t), t \geq 0\}$ сильно непрерывна.

Включение $\exp \sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})t \subset \sigma(T_{\mathcal{U}}(t)) \setminus \{0\}$ известно (оно верно для произвольной сильно непрерывной полугруппы линейных операторов [3, гл. XVI]). Включение в другую сторону следует из формулы

$$((T_{\mathcal{U}}(t) - I)^{-1}x)(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G(s, s+kt)x(s+kt), \quad t > 0, \quad (12)$$

которая имеет место при условии обратимости оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ (G — функция Грина, определенная формулой (6)). Действительно, при любых $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, $s \in \mathbb{R}$ и $t > 0$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} & (T_{\mathcal{U}}(t) - I) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} G(s, s + kt) x(s + kt) \right) \\ &= \mathcal{U}(s, s - t) \left[- \sum_{k \leq 0} \mathcal{U}(s - t, s + (k - 1)t) P(s + (k - 1)t) x(s + (k - 1)t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \geq 1} \mathcal{U}(s - t, s + (k - 1)t) Q(s + (k - 1)t) x(s + (k - 1)t) \right] \\ &\quad + \sum_{k \leq 0} \mathcal{U}(s, s + kt) P(s + kt) x(s + kt) - \sum_{k \geq 1} \mathcal{U}(s, s + kt) Q(s + kt) x(s + kt) \\ &= \mathcal{U}(s, s)(P(s) + Q(s))x(s) = x(s). \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что оператор, определенный формулой (12), является также и левым обратным для оператора $T_{\mathcal{U}}(t) - I$. Итак, доказано, что если $0 \notin \sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$, то $1 \notin \sigma(T_{\mathcal{U}}(t))$ для любого $t > 0$. Случай $\lambda \notin \sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$ сводится к рассмотренному с использованием семейства $\mathcal{U}(\lambda)$ (см. замечание 1) и оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}(\lambda)} = \mathcal{L}_{\mathcal{U}} - \lambda I$ и с учетом того факта, что $\mathcal{L}_{\mathcal{U}(\lambda)}$ является производящим оператором полугруппы операторов $\{T_{\mathcal{U}}(t) \exp(-\lambda t), t \geq 0\}$. Второе утверждение теоремы следует из первого утверждения и леммы 1. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ обратим, то оператор $\mathcal{D}_0^{-1} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ имеет вид

$$(\mathcal{D}_0^{-1}x)(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G(n, m)x(m), \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 5. Спектр $\sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$ оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ является объединением некоторого семейства прямых из $\mathbb{C}$, параллельных мнимой оси $i\mathbb{R}$, и содержит прямую

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda = \chi_+(\mathcal{U})\}, \quad \chi_+(\mathcal{U}) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\mathcal{U}(s, s - \tau)\|,$$

причем $\sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})} \text{Re } \lambda = \chi_+(\mathcal{U})$. Если размерность $\dim X$ банахова пространства X конечна, то имеет место следующее представление для $\sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$:

$$\sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) = \bigcup_{k=1}^m \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_k \leq \text{Re } \lambda \leq \beta_k\}, \quad (14)$$

где $-\infty \leq \alpha_1 \leq \beta_1 < \alpha_2 \leq \beta_2 < \dots < \alpha_m \leq \beta_m = \chi_+(\mathcal{U}) < \infty$, $m \leq \dim X$.

В частности, спектр скалярного дифференциального оператора $\mathcal{L} = -d/dt + a(t): D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, где $a \in S_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, совпадает с множеством

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \inf_{s \in \mathbb{R}} \int_s^{s+\tau} \text{Re } a(\alpha) d\alpha \leq \text{Re } \lambda \leq \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sup_{s \in \mathbb{R}} \int_s^{s+\tau} \text{Re } a(\alpha) d\alpha \right\}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 достаточно рассмотреть разностный оператор $T_{\mathcal{U}}(1) \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и получить соответствующие утверждения о его спектре (как объединении концентрических окружностей). Рассмотрим группу изометрических линейных операторов $\{V(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ из банаховой алгебры $\text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, имеющих вид

$$(V(\lambda)x)(t) = (\exp i\lambda t)x(t), \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X), \quad t, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Из равенств $V(\lambda)T_{\mathcal{U}}(1)V(-\lambda) = (\exp i\lambda)T_{\mathcal{U}}(1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, означающих подобие оператора $T_{\mathcal{U}}(1)$ операторам $\gamma T_{\mathcal{U}}(1)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, следует, что спектр $\sigma(T_{\mathcal{U}}(1))$ оператора $T_{\mathcal{U}}(1)$ является объединением семейства окружностей с центром в точке 0.

Допустим, что некоторая окружность $S(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \alpha\}$, $\alpha > 0$, принадлежит резольвентному множеству $\rho(T_{\mathcal{U}}(1))$ оператора $T_{\mathcal{U}}(1)$, и пусть $\sigma(T_{\mathcal{U}}(1))$ является объединением двух спектральных множеств

$$\sigma_+ = \{\lambda \in \sigma(T_{\mathcal{U}}(1)) : |\lambda| > \alpha\}, \quad \sigma_- = \{\lambda \in \sigma(T_{\mathcal{U}}(1)) : |\lambda| < \alpha\}.$$

Пусть $P(\sigma_+)$ и $P(\sigma_-)$ — соответствующие проекторы Рисса (так что $I = P(\sigma_+) + P(\sigma_-)$).

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha = 1$. В этом случае $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ — обратимый оператор и, согласно теореме 4, для семейства $\mathcal{U}$ имеет место экспоненциальная дихотомия. Представим проектор $P(\sigma_-)$ в виде (см. [10, с. 33])

$$P(\sigma_-) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} (\gamma I - T_{\mathcal{U}}(1))^{-1} d\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (e^{i\varphi} I - T_{\mathcal{U}}(1))^{-1} e^{i\varphi} d\varphi.$$

Используя формулу (аналог формулы (13))

$$((e^{i\varphi} I - T_{\mathcal{U}}(1))^{-1}x)(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-i(k+1)\varphi} G(s, s+k)x(s+k),$$

после интегрирования выражения для $P(\sigma_-)$ получаем, что проектор $P(\sigma_-)$ является оператором умножения вида

$$(P(\sigma_-)x)(s) = G(s, s)x(s) = P(s)x(s), \quad x \in \mathcal{F}, \quad s \in \mathbb{R},$$

где $P: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X$ — сильно непрерывная проекторнозначная функция, участвующая в определении экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$.

Пусть $\dim X < \infty$; тогда функция P непрерывна (в равномерной операторной топологии), и потому размерность всех образов проекторов $P(s)$, $s \in \mathbb{R}$, не зависит от $s \in \mathbb{R}$. Отсюда и из вида проекторов Рисса следует, что число связных спектральных компонент у множества $\sigma(T_{\mathcal{U}}(1))$ не превосходит числа $\dim X$. Поэтому из теоремы 2 следует, что имеет место представление вида (14).

Утверждение теоремы о включении прямой $\chi(\mathcal{U}) + i\mathbb{R}$ в множество $\sigma(T_{\mathcal{U}}(1))$ и равенство $\chi_+(\mathcal{U}) = \sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})} \text{Re } \lambda$ непосредственно следуют из теоремы 2 и равенства

$$r(T_{\mathcal{U}}(1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_{\mathcal{U}}(n)\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\mathcal{U}(s, s-n)\|^{1/n} = \exp \chi_+(\mathcal{U}),$$

вытекающего из формулы Гельфанда для спектрального радиуса [3, с. 138].

Если $\mathcal{L} = -d/dt + a(t)$, то $\dim X = 1$ и поэтому множество $\sigma(T_{\mathcal{U}}(1))$ связно. В этом случае $\mathcal{U}(s, s - \tau) = \exp \int_{s-\tau}^s a(\lambda) d\lambda$, $s \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$. Поскольку оператор $T_{\mathcal{U}}(1)$ обратим и обратный к нему совпадает с оператором $T_{\mathcal{U}}(-1)$, то, применяя к $T_{\mathcal{U}}(-1)$ формулу Гельфанда, получим представление для $\sigma(\mathcal{L})$ в виде (15). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1 (теорема Массера [5]). *Дифференциальный оператор $\mathcal{L} = -d/dt + a(t): D(\mathcal{L}) \subset C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, где $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная почти периодическая функция, обратим тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} a_0 \neq 0$, где $a_0 \in \mathbb{C}$ — среднее значение функции a .*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если $\mathcal{U}(s, s - t_0)$, $s \in \mathbb{R}$, — обратимые операторы из $\operatorname{End} X$ при некотором $t_0 > 0$ и $\sup_{s \in \mathbb{R}} \|\mathcal{U}(s, s - t_0)^{-1}\| < \infty$, то полугруппа $\{T_{\mathcal{U}}(t), t \geq 0\}$ вкладывается в некоторую сильно непрерывную (при $\mathcal{F} = L_p$, $p \in [1, \infty)$, или $\mathcal{F} = C_0$) группу операторов и имеет место включение*

$$\sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \chi_-(\mathcal{U}) \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \chi_+(\mathcal{U})\},$$

где $\chi_-(\mathcal{U}) = -\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{-1} \ln \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\mathcal{U}(s, s + \tau)\|$ и $\mathcal{U}(s, s + \tau) = \mathcal{U}(s + \tau, s)^{-1}$ при $\tau > 0$.

Линейный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ назовем периодическим (периода $\omega > 0$), если он перестановочен с оператором $S(\omega) \in \operatorname{End} \mathcal{F}$ или, что эквивалентно, имеют место равенства $\mathcal{U}(t + \omega, s + \omega) = \mathcal{U}(t, s)$ для любых $s \leq t$.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ является периодическим (периода 1) оператором. Тогда имеет место равенство*

$$\exp \sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \mu \in \sigma(\mathcal{U}(1, 0)) \text{ с } |\mu| = |\lambda|\}. \quad (16)$$

В частности, оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ обратим тогда и только тогда, когда выполнено условие $\sigma(\mathcal{U}(1, 0)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{U}(n, n - 1) = \mathcal{U}(1, 0)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, то утверждение теоремы непосредственно следует из теорем 2 и 3 (если учесть, что спектр разностного оператора $(Ux)(n) = \mathcal{U}(1, 0)x(n - 1)$ совпадает с множеством из правой части равенства (16)). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Если A — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы операторов $\{T(t), t \geq 0\} \subset \operatorname{End} X$, то дифференциальный оператор $\mathcal{L} = -d/dt + A: D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обратим тогда и только тогда, когда выполнено условие $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$. В частности, если X — гильбертово пространство, то $\mathcal{L}$ обратим только при выполнении условий (1) $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, (2) $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(A - i\lambda I)^{-1}\| < \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X — гильбертово пространство, то из равенства Парсеваля в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}, X)$ следует, что выполнение двух приведенных условий эквивалентно обратимости оператора $\mathcal{L} = -d/dt + A: D(\mathcal{L}) \subset L_2(\mathbb{R}, X) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, X)$. Осталось использовать теорему 4. Следствие доказано.

Отметим, что непосредственно из следствия вытекает известная теорема Герхарда [12, с. 95].

ТЕОРЕМА 7. *Пусть семейство $\mathcal{U} \subset \operatorname{End} X$ допускает экспоненциальную дихотомию с показателем $\beta > 0$ и коэффициентом $M > 0$. Если семей-*

ство эволюционных операторов $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}(t, s), s \leq t\}$ из $\text{End } X$ удовлетворяет условию

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|\mathcal{U}(n, n-1) - \mathcal{V}(n, n-1)\| < \frac{1}{M} \frac{1-\gamma}{1+\gamma}, \quad (17)$$

где $\gamma = \exp(-\beta)$, то оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{V}}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ обратим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теорем 3 и 4 следует обратимость оператора $\mathcal{D}_0 \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$, а из формулы (13) получаем оценку $\|\mathcal{D}_0^{-1}\| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} M\gamma^{|k|} = M(1+\gamma)(1-\gamma)^{-1}$. Следовательно, из условия (17) вытекает обратимость разностного оператора $(\mathcal{D}'_0 x)(n) = x(n) - \mathcal{V}(n, n-1)x(n-1)$. Обратимость оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ следует из теоремы 3. Теорема доказана.

§2. Обсуждение полученных результатов. Примеры и замечания²

Полученные результаты (особенно теоремы 1–4) позволяют широко использовать теорию полугрупп линейных операторов при исследовании линейных параболических дифференциальных операторов с переменными коэффициентами и, следовательно, для дифференциальных операторов с частными производными. Например, к рассматриваемым операторам относится дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = -d/dt + A(t): D(\mathcal{L}) \subset L_p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L_p(\mathbb{R}, X), \quad (18)$$

где $X = L_2(\Omega) = L_2(\Omega, \mathbb{C})$, Ω — ограниченная гладкая область из $\mathbb{R}^n$. Семейство линейных дифференциальных операторов $A(t): H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega) \subset L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, $t \in \mathbb{R}$ ($H_0^m(\Omega)$, $H^{2m}(\Omega)$ — пространства Соболева [6]), определяется семейством дифференциальных выражений

$$(l_t y)(u) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{\alpha}(t, u)(D^{\alpha} y)(u), \quad u \in \Omega, t \in \mathbb{R},$$

и краевыми условиями Дирихле на границе $\partial\Omega$ области Ω . Функции $a_{\alpha}: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq 2m$, считаются принадлежащими пространству $C(\mathbb{R}, C^k(\Omega))$ для достаточно большого $k \in \mathbb{N}$ и удовлетворяют условию Липшица, если их рассматривать как функции от первого аргумента со значениями в $C^k(\Omega)$. Кроме перечисленных условий предполагается, что семейство дифференциальных выражений l_t , $t \in \mathbb{R}$, равномерно эллиплично.

Из приведенных условий следует, что эллиптические операторы $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, являются производящими операторами аналитических полугрупп линейных ограниченных операторов, причем выполнены условия теоремы Соболевского–Танабе [13, с. 589], которая гарантирует корректность задачи Коши на $\mathbb{R}$ (существование семейства эволюционных операторов).

В заключение отметим, что в работах [5, 9, 10] рассматривались дифференциальные операторы вида $-d/dt + A(t)$ в банаховом пространстве $C(\mathbb{R}, X)$ с функцией $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X$. Утверждение (1) теоремы 4 было получено в монографии [10, теорема 3.3'] при некоторых дополнительных условиях, которые для пространства $\mathcal{F} = C$ были сняты в работе [1, гл. X], причем там не требовалось выполнения условия $A(t) \in \text{End } X$, $t \in \mathbb{R}$. В статье [9] было доказано, что условие экспоненциальной дихотомии семейства эволюционных операторов

²Материал этого параграфа представлен в редакцию журнала 6 декабря 1995 г.

эквивалентно выполнению условия $\sigma(T_{\mathcal{U}}(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Аналогичное утверждение приведено в монографии [15, теорема 9.3] для элементов некоторых C^* -алгебр, порожденных динамическими системами.

Дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами рассматривались в работах [1, 6, 8]. В статье [8] была доказана равносильность условий (равномерной) инъективности операторов $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ и $\mathcal{D}_0$. Среди имеющихся в монографии [6] результатов, которые наиболее связаны с теоремами 1–4, отметим теорему 7.6.3, в которой установлена обратимость оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ при некоторых условиях, включающих наличие экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$, и утверждение (см. с. 251) об экспоненциальной дихотомии этого семейства при условии дискретной дихотомии семейства операторов $\{\mathcal{U}(t_0 + n, t_0 + n - 1), n \in \mathbb{Z}\}$ для всех $t_0 \in \mathbb{R}$. Следует отметить, что из [6, теорема 7.6.5] и теорем 3 и 4 следует, что семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию, если допускает дискретную дихотомию лишь семейство $\{\mathcal{U}(n, n - 1), n \in \mathbb{Z}\}$. Дискретный аналог утверждения 1 теоремы 4 имеется в [6, теорема 7.6.5], и там же (на с. 363 в комментариях к гл. IX) ставился вопрос о доказательстве утверждения 1 теоремы 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. Изд-во МГУ, М., 1978.
2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Наука, М., 1967.
3. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, М., 1962.
4. Baskakov A. G. Investigation of spectral properties of differential operator $\mathcal{L} = -d/dt + A(t)$ by means of semigroup $\exp \mathcal{L}t$, $t \geq 0$. Intern. Conf. on Functional Equations and Application, Moscow, Russia, August 14–21 (1994), p. 8–9.
5. Массера Х. Л., Шеффер Х. Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. Мир, М., 1970.
6. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. Мир, М., 1985.
7. Баскаков А. Г. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений. Матем. заметки, **24**, №2, 195–205 (1978).
8. Тюрин В. М. Об обратимости линейных дифференциальных операторов в некоторых функциональных пространствах. Сиб. матем. ж., **32**, №3, 160–165 (1991).
9. Забрейко П. П., Нгуен Ван Минь. Группа характеристических операторов и ее применения в теории линейных обыкновенных дифференциальных операторов. Доклады РАН, **324**, №1, 24–28 (1992).
10. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Наука, М., 1970.
11. Баскаков А. Г. Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц. Матем. заметки, **52**, №2, 17–25 (1992).
12. Nagel R. One-parameters semigroups of positive operators. Lecture Notes in Math., Vol. 1184, Springer-Verlag, 1984.
13. Иосида К. Функциональный анализ. Мир, М., 1967.
14. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 1, ИЛ, М., 1962.
15. Антонецкий А. Б. Линейные функциональные уравнения: Операторный подход. Университетское, Минск, 1988.