Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Набоко, Теорема Зигмунда и граничное поведение операторных R -функций, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 3, 82–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa540>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:11:07

Теорема Зигмунда и граничное поведение операторных R -функций

© 1996. С. Н. НАБОКО¹

В работе изучается граничное поведение аналитических в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ оператор-функций $T(\lambda)$, принимающих значения в классе диссипативных операторов $(\operatorname{Im} T(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} (T^*(\lambda) - T(\lambda))/2i \geq 0, \lambda \in \mathbb{C}_+)$ в гильбертовом пространстве H . Функции такого типа называются операторными R -функциями и появляются в различных задачах теории операторов в гильбертовом пространстве и в математической физике: в теории возмущений сингулярного спектра самосопряженных операторов [1, 2], теории рассеяния [3], в задачах, связанных с формулой следа [4, 5], в теории функциональных моделей и характеристических функций несамосопряженных операторов [4, 6], теории вольтерровых операторов [7], при изучении преобразования Гильберта в пространстве векторнозначных функций [8] и в теории мартингалов.

Основные факты, касающиеся граничного поведения на $\mathbb{R}$ операторных R -функций, принимающих значения в классах $\mathfrak{S}_p$, $0 < p < \infty$, компактных операторов, s -числа которых суммируемы со степенью p [9], приведены в работе [10]. Как показано в [2], операторная R -функция $T(\lambda)$ общего вида может быть представлена в следующей форме:

$$T(\lambda) = A + B\lambda + V^{1/2}(I + \lambda\mathcal{L})(\mathcal{L} - \lambda)^{-1}V^{1/2}|_H, \quad (1)$$

где $A = A^*$, $B \geq 0$ — ограниченные операторы в H , а $V \geq 0$ и $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ — операторы в более широком вспомогательном гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \supset H$, причем $V|_{\mathcal{H} \ominus H} = 0$. Здесь оператор $\mathcal{L}$ является обобщением дилатации максимального диссипативного оператора [6] на случай общей операторной R -функции. Легко видеть, что если $T(i) \in \mathfrak{S}_p$, то $A, B, V \in \mathfrak{S}_p$, $p > 0$, и, следовательно, $T(\lambda) \in \mathfrak{S}_p$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Однако вопрос о существовании п.в. (нетангенциальных) граничных значений $T(k + i0)$ и топология предельного перехода на границу представляют значительную трудность. Формула (1) позволяет без уменьшения общности ограничиться лишь операторными R -функциями более специального вида

$$T(\lambda) = V^{1/2}(\mathcal{L} - \lambda)^{-1}V^{1/2}|_H. \quad (2)$$

При этом различие между пространствами H и $\mathcal{H}$ представляется здесь несущественным; поэтому достаточно для простоты записи считать все операторы действующими в H . Известно [10], что при $V \in \mathfrak{S}_p$, $p < 1$, п.в. на $\mathbb{R}$ существуют нетангенциальные граничные пределы $T(k + i0)$, $k \in \mathbb{R}$, в топологии пространства $\mathfrak{S}_p$. В то же время для любого неотрицательного оператора $V \notin \mathfrak{S}_1$ можно найти $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$, такой, что $T(\lambda)$ (см. (2)) не имеет всюду

¹Работа была выполнена при поддержке INTAS, грант 93.1815.

на $\mathbb{R}$ «радиальных» граничных пределов даже в слабой топологии [11]. Однако если $V \in \mathfrak{S}_1$, то граничные пределы существуют в метрике пространства $\mathfrak{S}_p$ для любого $p > 1$, но, вообще говоря, не в топологии сходимости по ядерной норме [10]. При изучении данного круга вопросов большую роль играет аналогия с действием преобразования Гильберта в классе скалярных функций. Более того, она служит одним из источников доказательств операторных теорем [10]. Так, известная теорема Колмогорова [12] о действии преобразования Гильберта в L^p , $0 < p < 1$, имеет прямым аналогом ранее упомянутый результат о граничных значениях операторных R -функций при $V \in \mathfrak{S}_p$. Слабый тип $(1, 1)$ преобразования Гильберта в L^1 влечет за собой соответствующее утверждение для $V \in \mathfrak{S}_1$. Переходя к важному в приложениях вопросу о существовании нетангенциальных граничных пределов для $T(\lambda)$ в ядерной норме, можно упомянуть теорему Зигмунда о классе $L \log L$: скалярная R -функция $f(z)$ в круге $|z| < 1$ принадлежит классу Харди $H^1(\mathbb{D}) \iff \operatorname{Im} f(e^{i\theta}) \in L \log L$ (т.е. $\int_0^{2\pi} |\operatorname{Im} f(e^{i\theta})| \log^+(1/|\operatorname{Im} f(e^{i\theta})|) d\theta < \infty$) [12]. Последнее позволяет ввести естественное условие на собственные числа оператора V :

$$\sum_n s_n(V) \log^+(1/s_n(V)) < \infty, \quad (3)$$

и поставить вопрос о ядерности граничных пределов $T(k + i0)$ при выполнении условия (3) на «возмущение» V , более сильного, чем $V \in \mathfrak{S}_1$. Кроме того, параллельно рассмотрим еще два других ограничения на V :

$$V \in l_1 \times l_\omega \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \in l_1, \alpha_n \downarrow 0, \{\beta_n\}_{n=1}^\infty, \beta_n \downarrow 0, \sum_n \frac{\beta_n}{n} < \infty, \quad (4)$$

$$s_n(V) \leq \alpha_n \beta_n,$$

$$\sum_n \frac{s_n^{1/2}(V)}{\sqrt{n}} < \infty. \quad (5)$$

В работе [10] доказано, что из условия (4) следует существование п.в. на $\mathbb{R}$ нетангенциальных граничных пределов $T(k + i0)$ в норме пространства $\mathfrak{S}_1$. Легко проверить, что справедливы следующие импликации: (4) $\implies$ (3), (4) $\implies$ (5), причем обе импликации, как показывают соответствующие контрпримеры, вообще говоря, необратимы. Кроме того, условие (3) эквивалентно сходимости ряда $\sum_n s_n(V) \ln n$, и ни одно из условий (3), (5) не влечет за собой другое. Наконец, из всех трех условий вытекает, что $s_n(V)n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Если же дополнительно известно, что $s_n(V)n$ стремится к 0 монотонно, то все три условия будут эквивалентны друг другу.

Оказывается, что естественный операторный аналог теоремы Зигмунда для R -функций несправедлив.

ТЕОРЕМА 1. *Существует неотрицательный компактный оператор V , удовлетворяющий условию (3), такой, что для подходящего самосопряженного оператора $\mathcal{L}$ в H граничные значения $T(k + i0)$ не принадлежат классу $\mathfrak{S}_1$ для п.в. $k \in \mathbb{R}$.*

Заметим, что из условия (3) следует, что $T(k+i0) \in \bigcap_{p>1} \mathfrak{S}_p$ для п.в. $k \in \mathbb{R}$. Таким образом, достаточное для ядерности оператора $T(k+i0)$ (для п.в. $k \in \mathbb{R}$) условие (4) не может быть ослаблено до «условия Зигмунда» (3). Отметим, что условие (5) также не влечет за собой принадлежность $T(k+i0) \in \mathfrak{S}_1$ для п.в. $k \in \mathbb{R}$ [10].

Далее рассмотрим вопрос о граничных значениях ядернозначных операторных R -функций ($V \in \mathfrak{S}_1$). Отметим, что в «классах Лоренца» $\mathfrak{S}_\pi$ [9] ($\pi = \{\pi_n\}_{n=1}^\infty$, $\pi_n \downarrow 0$) в работе [10] был получен окончательный ответ. Для произвольной ядернозначной операторной R -функции $T(\lambda)$ ее граничные значения $T(k+i0)$ принадлежат $\mathfrak{S}_\pi$ для п.в. $k \in \mathbb{R} \iff \sum_n \pi_n/n < \infty$. Ниже будет рассмотрен вопрос о граничных значениях в «классах Марцинкевича» $\mathfrak{S}_\Pi$ [9], сопряженных к «классам Лоренца» ($T \in \mathfrak{S}_\Pi \iff \sup_n \sum_{k=1}^n s_k(T)/\sum_{k=1}^n \pi_k < \infty$).

ТЕОРЕМА 2. (1) Пусть $C_n > 0$, $C_n \uparrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ и $\sum_n 1/(nC_n) < \infty$; тогда у ядернозначной операторной R -функции $T(\lambda)$ п.в. на $\mathbb{R}$ существуют не-тангенциальные граничные пределы в норме $\sup_n \sum_{k=1}^n s_k(T)/C_n$ (см. [10]).

(2) Пусть $C_n > 0$, $C_n \uparrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, и для любой операторной R -функции $T(\lambda)$ вида (2) с $V \in \mathfrak{S}_1$ граничные значения для п.в. $k \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условию $\sup_n \sum_{k=1}^n s_k(T(k+i0))/C_n < \infty$; тогда $C_n \geq C_0 \ln n$, $n = 2, 3, \dots$, где постоянная C_0 больше 0.

Отметим, что из условий на последовательность C_n из п. (1) теоремы 2 не вытекает оценки, лучшей, чем $\ln n/C_n = o(1)$, $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, граничные значения ядернозначных операторных R -функций не могут, вообще говоря, находиться в «классе Марцинкевича» $\mathfrak{S}_\Pi$, «лучшем», чем $\mathfrak{S}_\Omega \equiv \mathfrak{S}_\omega^*$ — сопряженный к классу Мацаева $\mathfrak{S}_\omega$ [9] ($\mathfrak{S}_\Omega \equiv \mathfrak{S}_\Pi$ при $\pi_n = 1/n$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Faddeev L. D., Pavlov B. S. Lecture Notes in Math., Vol. 1043, Springer-Verlag (1984), p. 124–128.
2. Naboko S. N. Arkiv Mat., **25**, 115–140 (1987).
3. Набоко С. Н. Проблемы матем. физ., ЛГУ, **12**, 132–155 (1987).
4. Веселов В. Ф., Набоко С. Н. Матем. сб., **129** (171), №1, 20–29 (1986).
5. Бирман М. С., Яфаев Д. Р. Алгебра и анализ, **4**, №5, 1–44 (1992).
6. Сёкефальви-Надь Б., Фойаш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Мир, М., 1970.
7. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтеровых операторов в гильбертовом пространстве. Наука, М., 1967.
8. Bourgain J. Israel Semin. Geom. Funct. Anal., S.I., XVII–XVI23 (1984).
9. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Наука, М., 1965.
10. Набоко С. Н. Алгебра и анализ, **1**, №5, 197–222 (1989).
11. Naboko S. N. Func. Anal. and Oper. Theory, Banach Center Publ., **30**, 277–285 (1994).
12. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . Мир, М., 1984.