Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Рабинович, Алгебры сингулярных интегральных операторов на составных контурах с точками завихрения, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 3, 85–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa541>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:56:08

УДК 517.9

Алгебры сингулярных интегральных операторов на составных контурах с точками завихрения

© 1996. В. С. РАБИНОВИЧ¹

Даны условия фредгольмовости и формула индекса для операторов из банаховой алгебры, порожденной сингулярными интегральными операторами (СИО) на составных контурах с точками завихрения и коэффициентами, имеющими ограниченные разрывы второго рода. Исследованию фредгольмовости различных классов сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами на кусочно-ляпуновских контурах посвящены монографии [1–3] и др. Алгебры, порожденные СИО с кусочно-непрерывными коэффициентами на замкнутых контурах с точками логарифмического завихрения, рассмотрены в [4]. Работы [5, 6] посвящены C^* -алгебрам, порожденным СИО на составных контурах с узлами, являющимися точками завихрения менее общего характера, чем здесь.

Если B — банахово пространство, то через $\mathcal{L}(B)$ обозначается банахова алгебра всех ограниченных операторов, действующих в B , а через $\mathcal{K}(B)$ — двусторонний идеал компактных операторов в ней.

Через $L_{p,\beta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$, $p \in (1, \infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$, обозначим банахово пространство комплексных вектор-функций $u(r) = (u_1(r), \dots, u_N(r))$ с нормой $\|u\|_{L_{p,\beta}} = (\int_{\mathbb{R}_+} r^{p\beta} \sum_{j=1}^N |u_j(r)|^p dr)^{1/p}$. Матрицу-функцию $a(\lambda) \in L_\infty(\mathbb{R}_{\beta+1/p}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{C}^N)$, где $\mathbb{R}_\mu = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = \mu\}$, будем называть меллиновским мультипликатором в $L_{p,\beta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$, если оператор меллиновской свертки $a(\mathcal{D})$ ограничен в $L_{p,\beta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$. Через $\mathfrak{N}_{p,\beta}(N)$, $p \in (1, \infty)$, будем обозначать банахову алгебру меллиновских мультипликаторов в $L_{p,\beta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ с нормой, индуцированной операторной нормой $a(\mathcal{D})$, а через $\mathcal{R}_{p,\beta}(N)$ — банахову алгебру ограниченных непрерывных на $\mathbb{R}_+$ $N \times N$ -матриц-функций $a(r, \cdot)$ со значениями в $\mathfrak{N}_{p,\beta}(N)$, нормой $\|a\|_{\mathcal{R}_{p,\beta}} = \sup_{r \in \mathbb{R}} \|a(r, \cdot)\|_{\mathfrak{N}_{p,\beta}(N)}$ и естественными операциями сложения и умножения матриц-функций. Через $\mathfrak{J}_{p,\beta}^0(N)$ обозначим идеал в $\mathcal{R}_{p,\beta}(N)$, состоящий из таких матриц-функций $a \in \mathcal{R}_{p,\beta}(N)$, что $\lim_{r \rightarrow +0} \|a(r, \cdot)\|_{\mathfrak{N}_{p,\beta}(N)} = 0$, а через $\mathcal{R}_{p,\beta}^+(N)$ — факторалгебру $\mathcal{R}_{p,\beta}(N)/\mathfrak{J}_{p,\beta}^0(N)$ с естественной нормой.

Будем говорить, что простая (гомеоморфная сегменту) спрямляемая незамкнутая дуга $\gamma \subset \mathbb{C}$ с концами x_1, x_2 принадлежит классу $\mathfrak{X}$, если:

- 1) $\gamma \setminus \{x_1, x_2\}$ — локально ляпуновская дуга;
- 2) пусть $x - x_j = \varphi_j(t) = t \exp i\omega_j(t)$, $t \in [0, t_j]$, где $\omega_j(t)$ — вещественная функция, параметризация дуги γ в окрестности конца x_j . Будем предполагать, что $\omega_j(t) = \delta_j \ln t + \theta_j(t)$, где $\delta_j \in \mathbb{R}$, $\theta_j(t) \in C^\infty((0, t_j])$, и

$$\lim_{t \rightarrow +0} (t \partial/\partial t)^k \theta_j(t) = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №93-011-280.

Примерами функций $\theta(t)$, удовлетворяющих условию (1), являются $|\ln t|^\alpha$ и $a + b \sin |\ln t|^\alpha$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1)$.

Пусть Γ — ориентированный контур в плоскости $\mathbb{C}$, состоящий из конечного числа дуг класса $\mathfrak{A}$. Предполагается, что любые две дуги могут пересекаться только в концевых точках, и пусть $F \subset \Gamma$ — множество концевых точек этих дуг. Точки множества F будем называть узлами. Пусть $z \in F$, $N(z)$ — число дуг, составляющих узел z , и параметризации дуг γ_j , составляющих узел z , имеют следующий вид: $x - z = \varphi_j^z(t) = t \exp i \omega_j^z(t)$, $t \in [0, t_j]$, $j = 1, \dots, N(z)$, $\omega_j^z(t) = \delta_z \ln t + \theta_j^z(t)$, $\delta_z \in \mathbb{R}$. Будем предполагать, что существует $t_0 > 0$, такое, что $\theta_j^z(t) \in (\alpha_j, \beta_j)$, когда $t \in (0, t_0]$, где $0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_N < \beta_N < 2\pi$. Через $PSV(\Gamma, F)$ обозначим C^* -алгебру, полученную замыканием по $\sup$ -норме на Γ множества ограниченных непрерывно дифференцируемых на $\Gamma \setminus F$ функций, таких, что $\lim_{\Gamma \ni x \rightarrow x_j} |x - x_j| a'(x) = 0$ для любого узла x_j . Функции класса $PSV(\Gamma, F)$ могут иметь ограниченные разрывы второго рода в окрестности узлов.

Пусть $L_p(\Gamma, \omega)$ — пространство функций, суммируемых с весом $\omega(x) = \prod_{m=1}^L |x - x_m|^{\beta_m}$, $x_m \in F$, $\beta_m \in (-1/p, 1 - 1/p)$, и p -й степенью ($1 < p < \infty$), а S_Γ — сингулярный интегральный оператор на контуре Γ , ограниченный в $L_p(\Gamma, \omega)$, так как дуги γ_j , составляющие контур, удовлетворяют условию Карлесона.

Определим локальные символы $\sigma^x(a)$ оператора умножения на функцию $a(x) \in PSV(\Gamma, F)$. Пусть $x \in \Gamma \setminus F$; тогда $\sigma^x(a) = a(x)$. Если же $x \in F$, то локальный символ $\sigma^x(a)$ есть диагональная матрица $\text{diag}(a_1^x(t), \dots, a_N^x(t))$, где $a_k^x(t) = a|_{\gamma_k}(x + \varphi_k^x(t))$, $t \in (0, t_0]$, t_0 — достаточно малое число.

Определим теперь локальные символы $\sigma^x(S_\Gamma)$. Пусть $x \in \Gamma \setminus F$; тогда $\sigma^x(S_\Gamma) = \text{sgn } \xi$, $\xi \in \mathbb{R}$. Если $x \in F$, то $\sigma^x(S_\Gamma)$ есть матрица-функция $\Omega^x(t, \lambda) = (\Omega_{jk}^x(t, \lambda))_{j,k=1}^{N(x)} \in \mathcal{R}_{p,\beta}(N)$, где $\Omega_{jk}^x(t, \lambda)$ вычисляются по формулам: $\Omega_{jk}^x(t, \lambda) = \pm \exp[\lambda(\theta_k^x(t) - \theta_j^x(t) - \pi)](\text{sh } \pi \lambda)^{-1}$, $k > j$, $\Omega_{jk}^x(t, \lambda) = \pm \exp[\lambda(\theta_k^x(t) - \theta_j^x(t) + \pi)](\text{sh } \pi \lambda)^{-1}$, $k < j$, $\Omega_{jj}^x(\lambda) = \pm \text{cth}(\pi \lambda)$. Здесь $t \in (0, s]$, где s достаточно мало, знак $+$ берется, если контур Γ ориентирован так, что кривая γ_k выходит из узла, и знак $-$ берется, если кривая γ_k входит в узел, $\lambda \in \{\zeta = \mu + i\nu \in \mathbb{C} : \nu = -\delta_x \mu + \beta_x + 1/p, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ банахову алгебру операторов, действующих в $L_p(\Gamma, \omega)$ и порожденную операторами вида $A = \sum_k \prod_l A^{kl}$, где A^{kl} — либо СИО S_Γ , либо оператор умножения на функцию $a(x) \in PSV(\Gamma, F)$, и k, l пробегает конечное множество индексов.

Алгебра $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ неприводима и содержит двусторонний идеал компактных операторов $\mathfrak{K}(L_p(\Gamma, \omega))$. Операторы из алгебры $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ являются операторами локального типа на Γ .

Положим $\sigma^x(A) = \sum_k \prod_l \sigma^x(A^{kl})$, где $\sigma^x(A^{kl})$ определены выше. Отметим, что если $x \in F$, то $\sigma^x(A^{kl}) \in \mathcal{R}_{p,\beta(x)}(N)$, а также что $\sigma^x(A)$ в точке $x \in \Gamma \setminus F$ можно отождествить с парой чисел $(\sigma_+^x(A), \sigma_-^x(A))$.

Пусть $\|\sigma^x(A)\| = \max(|\sigma_+^x(A)|, |\sigma_-^x(A)|)$, если $x \in \Gamma \setminus F$, $\|\sigma^x(A)\| = \|\hat{\sigma}^x(A)\|_{\mathcal{R}_{p,\beta(x)}^+(N)}$, если $x \in F$, где $\hat{\sigma}^x(A)$ — факторкласс в $\mathcal{R}_{p,\beta(x)}^+(N)$, содержащий $\sigma^x(A)$, $\sigma(A) = \{\sigma^x(A)\}_{x \in \Gamma}$ и $\|\sigma(A)\| = \sup_{x \in \Gamma} \|\sigma^x(A)\|$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A = \sum_k \prod_l A^{kl}$. Тогда

$$\|\sigma(A)\| \leq \inf_{T \in \mathfrak{K}(L_p(\Gamma, \omega))} \|A - T\|_{\mathcal{L}(L_p(\Gamma, \omega))} \leq C \|\sigma(A)\|. \quad (2)$$

Оценка (2) и предельный переход позволяют определить символ $\sigma(A) = \{\sigma^x(A)\}_{x \in \Gamma}$ произвольного оператора $A \in \mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$. В множестве символов операторов из $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ естественным образом вводится структура банаховой алгебры. Эту алгебру мы будем обозначать через $\mathfrak{K}_p(\Gamma, \omega)$.

ТЕОРЕМА 2. (а) *Отображение $\Sigma_p: \mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega) \rightarrow \mathfrak{K}_p(\Gamma, \omega)$, сопоставляющее оператору его символ, есть эпиморфизм банаховой алгебры $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ на банахову алгебру $\mathfrak{K}_p(\Gamma, \omega)$, ядром которого является двусторонний идеал $\mathfrak{K}(L_p(\Gamma, \omega))$.*

(b) *$A \in \mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ фредгольмов в $L_p(\Gamma, \omega)$ тогда и только тогда, когда его символ обратим в $\mathfrak{K}_p(\Gamma, \omega)$, что равносильно условию: $\sigma_{\pm}^x(A) \neq 0$, когда $x \in \Gamma \setminus F$, и для любой точки $x \in F$ существуют $t_x \in \mathbb{R}_+$ и $C_x > 0$, такие, что для любой пары $(t, \mu) \in (0, t_x] \times \mathbb{R}$*

$$|\det \sigma^x(A)(t, \mu + i(-\delta\mu + \beta + 1/p))| \geq C_x. \quad (3)$$

(c) *Если $A \in \mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ фредгольмов в $L_p(\Gamma, \omega)$, то его регуляризатор R также принадлежит алгебре $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ и $\sigma(R) = \sigma(A)^{-1}$.*

(d) *Индекс фредгольмова оператора $A \in \mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ вычисляется по формуле*

$$\begin{aligned} \text{Ind } A = & - \sum_{j=1}^L \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{\sigma_+^x(A)}{\sigma_-^x(A)} \right]_{x \in \gamma'_j} \\ & - \sum_{j=1}^M \frac{1}{2\pi} [\arg \det \sigma^{x_j}(A)(t_j, \mu + i(-\delta_{x_j}\mu + \beta_{x_j} + 1/p))]_{\mu=-\infty}^{\infty}. \end{aligned} \quad (4)$$

В формуле (4) L — число дуг, составляющих контур Γ , M — число его узлов x_j и t_j — произвольные точки из полуинтервалов $(0, t_{x_j}]$, определяемых условием (3). Дуги γ'_j определяются следующим образом. Если кривая γ соединяет узлы x_{j_1} и x_{j_2} и t_{j_1} и t_{j_2} — зафиксированные выше точки, то γ' — часть кривой γ , лежащая между точками $x'_{j_1} = x_{j_1} + \varphi_{j_1}(t_{j_1})$ и $x'_{j_2} = x_{j_2} + \varphi_{j_2}(t_{j_2})$, с ориентацией, индуцированной ориентацией кривой γ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Штиинца, Кишинев, 1973.
2. Roch S., Silberman B. Algebras of convolution operators and their image in the Calkin algebras. Report Math., 90-05, Karl Weierstrass Inst. Math., Akad. Wiss. DDR, Berlin, 1990.
3. Симоненко И. Б., Чинь Нгок Минь. Локальный принцип в теории одномерных сингулярных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Ростовский университет, 1986.
4. Bottcher A., Karlovich Yu. I. Integral Equations and Operator Theory, **22**, 127–161 (1995).
5. Рабинович В. С. ДАН СССР, **321**, №5, 692–696 (1991).
6. Рабинович В. С. Матем. заметки, **58**, вып. 1, 65–85 (1995).