Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Чан Куок Бинь, Нгуен Минь Чыонг, Об одной теореме о неподвижной точке, *Функци. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 3, 93–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa544>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:53:37

ЛИТЕРАТУРА

1. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. ИЛ, М. (1947). 2. Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. Мир, М. (1985). 3. Сергеев А. Н. Функци. анализ и его прил., **26**, вып. 3, 88–90 (1992).

Балаковский институт техники,
технологии и управления

Поступило в редакцию
15 декабря 1994 г.

УДК 517.98

Об одной теореме о неподвижной точке

© 1996. ЧАН КУОК БИНЬ, НГУЕН МИНЬ ЧЫОНГ

1. ТЕОРЕМА 1. Пусть H — замкнутое ограниченное множество в нормированном пространстве X и T — отображение множества $H \times H$ в H , удовлетворяющее следующему условию:

$$\|T(x, y) - T(z, t)\| \begin{cases} < \max\{\|x - z\|, \|y - t\|\}, & \text{если } (x, y) \neq (z, t) \\ & \text{и } x \neq y \text{ или } z \neq t, \\ \leq \|x - z\| = \|y - t\|, & \text{если } x = z \text{ и } y = t, \end{cases} \quad (1)$$

при всех $x, y, z, t \in H$ (см. [5, 6]).

Предполагается, кроме того, что либо H компактно, либо T — отображение множества $H \times H$ в компактное подмножество множества H .

Тогда уравнение

$$T(x, x) = x \quad (2)$$

имеет единственное решение в H . Кроме того, каждое уравнение

$$x_n = T(x_n, x_{n-1}), \quad n \geq 1, \quad (3)$$

имеет единственное решение x_n и последовательность $\{x_n\}$, определенная уравнением (3), сходится к решению уравнения (2) при любом выборе точки $x_0 \in H$.

Эта теорема доказывается без труда при помощи теоремы Эдельштейна из [3] для отображения $T_v(x) = T(x, v)$.

Заметим, что настоящая теорема распространяет теорему Эдельштейна из [3] на отображение $T(\cdot, \cdot)$. Если вместо (3) в тех же предположениях, что и в теореме 1, использовать итерацию Пикарда для $T_*(x) = T(x, x)$, как это сделано в работах [1–3, 10] и др., то нельзя будет говорить о существовании и сходимости приближенных решений для уравнения (2).

2. Аналогично доказательству теоремы 1 доказывается

ТЕОРЕМА 2. Пусть H — замкнутое ограниченное подмножество в метрическом пространстве (X, d) и $g(\cdot, \cdot): H \times H \rightarrow [0, \infty)$ — функция, обладающая следующими свойствами:

- $g(x, y) = 0$, если и только если $x = y$ для всех $x, y \in H$;
- g непрерывна по (x, y) ;
- если $g(x, y) \rightarrow 0$, то $d(x, y) \rightarrow 0$.

Пусть T — отображение множества $H \times H$ в H , удовлетворяющее следующему условию нерастягиваемости:

$$g(T(x, y), T(z, t)) \begin{cases} < \max \{g(x, z), g(y, t)\}, & \text{если } (x, y) \neq (z, t) \\ & \text{и } x \neq y \text{ или } z \neq t, \\ \leq g(x, z) = g(y, t), & \text{если } x = z \text{ и } y = t, \end{cases} \quad (4)$$

при всех $x, y, z, t \in H$.

Пусть, кроме того, либо H компактно, либо T отображает $H \times H$ в компактное подмножество множества H .

Тогда заключения теоремы 1 остаются справедливыми.

3. Теперь рассмотрим более общий случай, когда T — нерастягивающее отображение (см. [9, 4]), с мерой некомпактности χ (см. [9]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть H — замкнутое ограниченное выпуклое подмножество в равномерно выпуклом банаховом пространстве X , а T — отображение множества $H \times H$ в H , удовлетворяющее условию (1) и условию

$$\chi(T(U, V)) < \max \{\chi(U), \chi(V)\} \quad (5)$$

для подмножеств $U, V \subset H$, таких, что $\chi(U \setminus V) > 0$.

Тогда имеются такие числа λ_n , $0 < a < \lambda_n < b < 1$, $n \geq 1$, где a и b — постоянные, что последовательность $\{x_n\}$, определенная следующим образом:

$$x_n = \lambda_n x_{n-1} + (1 - \lambda_n) \tilde{x}_n, \quad \tilde{x}_n = T(\tilde{x}_n, x_{n-1}), \quad (6)$$

сходится к решению уравнения (1) при любой точке $x_0 \in H$.

Для доказательства теоремы 3 привлекаются строго нерастягивающее уплотняющее отображение $T: H \rightarrow H$, свойства меры χ и одна теорема Браудера из [2] (см. [8]).

4. Приведем некоторые совсем простые примеры. Рассмотрим отображение $T(x, y) = (\sin |x - y|)/|x - y|$ в $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Очевидно, что решение x_n из (3) сходится к «угловому решению» 1 уравнения (2), но итерация $x_n = T(x_{n-1}, x_{n-1})$ не применима. Ясно также, что $x = 0$ — решение уравнения (2) для $T(x, y) = \tau y / \exp(\|x - y\|)$, $x, y \in l_p$, $1 < p < \infty$, где $\tau: x = (x_1, x_2, \dots) \mapsto \tau x = (0, x_1, x_2, \dots)$, $x \in l_p$, и при любой точке $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots)$, $x_{01} \neq 0$, последовательность $\{x_n = T(x_n, x_{n-1})\}$ сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$ (см. [8]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Belluce L. P., Kirk W. A. Proc. Am. Math. Soc., **20**, 141–146 (1969).
2. Browder F. E. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **54**, 1011–1041 (1965).
3. Edelstein M. J. London Math. Soc., **37**, 74–79 (1962).
4. Furi M., Vignoli A. Boll. Un. Math. Ital., **4** (4), No. 2, 505–509 (1969).
5. Курнел Н. С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. Наукова Думка, Киев (1968).
6. Nguyen Minh Chuong, Mamedov Ya. D., Knuat van Ninh. Approximate Solutions of Operator Equations. Sci. and Tech., Hanoi (1992).
7. Nguyen Minh Chuong, Tran thi Lan Anh, Tran Quoc Binh. Preprint ICTP, IC/89/302, Miramire-Triest, Italy (1989).
8. Tran Quoc Binh, Nguyen Minh Chuong. Preprint ICTP, IC/93/241, Miramire-Triest, Italy (1993).
9. Садовский Б. Н. Функц. анализ и его прил., **1**, вып. 2, 74–76 (1967).
10. Petryshyn W. V., Williamson T. E. J. Math. Anal. Appl., **43**, 159–179 (1973).