Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. И. Бежаева, В. И. Оселедец, Об одном примере
«странного нехаотического аттрактора», *Функци.
анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 4, 1–9

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa545>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 04:32:04

УДК 512.54

Об одном примере «странного нехаотического аттрактора»^{*}

© 1996. З. И. БЕЖАЕВА, В. И. ОСЕЛЕДЕЦ

§1. Введение

В некоторых физических работах (см. [2, 5]) численно и экспериментально исследовалась следующая дискретная динамическая система — «модель странного нехаотического аттрактора»:

$$\theta_{n+1} = \{\theta_n + \alpha\}, \quad \tilde{X}_{n+1} = \sigma \cos(2\pi\theta_n) \operatorname{th}(\tilde{X}_n), \quad (1)$$

где α — иррациональное число, а фигурные скобки $\{\cdot\}$ означают дробную часть числа.

Результаты численного счета [5] показали, что при

$$\sigma = 3, \quad \alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$$

должен существовать единственный стационарный процесс $(\theta_n, \tilde{X}_n)$, являющийся решением системы (1), для которого $P(\tilde{X}_n = 0) = 0$. При этом процесс $\tilde{X}_n$ должен иметь непрерывный чисто сингулярный спектр. Позднее было показано, что это явление естественно возникает в некоторых автономных диссипативных динамических системах с непрерывным временем [6].

Здесь мы докажем утверждение о том, что при всех иррациональных α и $\sigma > \bar{\sigma} = 3.6161375\dots$ существует единственный стационарный процесс $(\theta_n, \tilde{X}_n)$, удовлетворяющий уравнениям (1) и такой, что $P(\tilde{X}_n = 0) = 0$.

При этих же условиях на α и σ мы докажем также, что процесс $\tilde{X}_n$ имеет непрерывный чисто сингулярный спектр.

Доказанные в работе утверждения могут быть изложены еще одним способом. Введем преобразование множества $[0, 1] \times \mathbb{R}$ пар (θ, x)

$$\tilde{T}(\theta, x) = (\{\theta + \alpha\}, \sigma \cos(2\pi\theta) \operatorname{th} x).$$

Будет показано, что существует единственная $\tilde{T}$ -инвариантная мера $\tilde{\mu}$ на $[0, 1] \times \mathbb{R}$, такая, что

- 1) проекция этой меры на $[0, 1]$ есть мера Лебега на $[0, 1]$;
- 2) $\tilde{\mu}([0, 1] \times \{0\}) = 0$.

Из доказательства этого утверждения будет видно, что носителем меры $\tilde{\mu}$ является множество $\tilde{X}$ — объединение графика некоторой измеримой положи-

^{*} Настоящая работа была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 93-01-00239), NSF (грант DMS-9300752) и грантом Международного научного фонда.

тельной функции $\varphi(\theta)$ и графика функции $-\varphi(\theta)$. Под носителем меры понимается любое множество меры 1. Для нас множество $\tilde{X}$ и есть аттрактор.

Будет доказано также, что динамическая система $(\tilde{T}, \tilde{X}, \tilde{\mu})$ имеет смешанный спектр. Унитарный оператор этой динамической системы в $L_2(\tilde{X})$, действующий по правилу $f(\theta, x) \rightarrow f(\tilde{T}(\theta, x))$, имеет чисто дискретный спектр в пространстве функций, зависящих только от θ . В ортогональном дополнении к этому пространству его спектр непрерывен и чисто сингулярен.

Видимо, это свойство динамической системы $(\tilde{T}, \tilde{X}, \tilde{\mu})$, обнаруженное при численном эксперименте в [5, 7], и послужило основанием считать динамическую систему (1) моделью «странного нехаотического аттрактора».

§2. О модуле $X_n = |\tilde{X}_n|$

Если $(\theta_n, \tilde{X}_n)$ удовлетворяет уравнениям (1), то процесс (θ_n, X_n) , где $X_n = |\tilde{X}_n|$, удовлетворяет уравнениям

$$\theta_{n+1} = \{\theta_n + \alpha\}, \quad X_{n+1} = \sigma |\cos(2\pi\theta_n)| \operatorname{th} X_n. \quad (2)$$

Мы докажем, что существует единственный стационарный процесс (θ_n, X_n) , удовлетворяющий уравнениям (2) и такой, что $P(X_n > 0) = 1$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sigma_0(\theta - k\alpha) = \sigma |\cos 2\pi(\theta - k\alpha)|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ f_\theta(x) &= \sigma_0(\theta) \operatorname{th}(x), \quad f_{n,\theta}(x) = f_{\theta-\alpha}(f_{\theta-2\alpha}(\dots(f_{\theta-n\alpha}(x))\dots)), \\ \bar{f}_\theta(x) &= \sigma_0(\theta) \frac{x}{x+1}, \quad \bar{f}_{n,\theta}(x) = \bar{f}_{\theta-\alpha}(\bar{f}_{\theta-2\alpha}(\dots(\bar{f}_{\theta-n\alpha}(x))\dots)). \end{aligned}$$

Введем преобразования $S, \bar{S}$ множества $[0, 1] \times \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ — множество всех неотрицательных чисел) пар (θ, x) следующим образом:

$$S(\theta, x) = (\{\theta + \alpha\}, f_\theta(x)), \quad \bar{S}(\theta, x) = (\{\theta + \alpha\}, \bar{f}_\theta(x)).$$

В этом параграфе мы построим положительную измеримую функцию $\varphi(\theta)$, такую, что график $(\theta, \varphi(\theta))$ является S -инвариантным множеством. Функция $\varphi(\theta)$, обладающая таким свойством, единственна (mod 0) по мере Лебега.

Сначала мы докажем аналогичное утверждение для преобразования $\bar{S}$.

ТЕОРЕМА 1. Если

$$\int_0^1 \ln \sigma_0(\theta) d\theta = \ln \frac{\sigma}{2} > 0,$$

т. е. если $\sigma > 2$, то для почти всех θ по мере Лебега и при всех $x > 0$ существуют

$$\psi(\theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{f}_{n,\theta}(x) = [c(\theta)]^{-1} > 0,$$

где

$$c(\theta) = \sigma_1^{-1} + (\sigma_1\sigma_2)^{-1} + \dots + (\sigma_1 \dots \sigma_n)^{-1} + \dots$$

и график $(\theta, \psi(\theta))$ есть $\bar{S}$ -инвариантное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дробно-линейному преобразованию $\bar{f}_\theta$ соответствует матрица

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразование $\bar{f}_{n,\theta}(x)$ также является дробно-линейным преобразованием, которому соответствует матрица

$$A_{n,\theta} = A_{\theta-\alpha} \cdots A_{\theta-n\alpha} = \begin{pmatrix} \sigma_{n,\theta} & 0 \\ c_{n,\theta} & 1 \end{pmatrix},$$

где $\sigma_{n,\theta} = \sigma_1 \cdots \sigma_n$. Из соотношения $A_{n+1,\theta} = A_{\theta-\alpha} A_{n,\theta-\alpha}$ следует, что $c_{n+1,\theta} = \sigma_{n,\theta-\alpha} + c_{n,\theta-\alpha}$. Пусть $c_{n+1,\theta}/\sigma_{n+1,\theta} = \tilde{c}_{n+1,\theta}$; тогда $\tilde{c}_{n+1,\theta} = \sigma_1^{-1} + \sigma_1^{-1} \tilde{c}_{n,\theta-\alpha}$. Отсюда получаем, что

$$\tilde{c}_{n+1,\theta} = \sigma_1^{-1} + (\sigma_1 \sigma_2)^{-1} + \cdots + (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{-1}.$$

Так как по условию теоремы $\int_0^1 \ln \sigma_0 d\theta = \ln(\sigma/2) > 0$ и $\theta \rightarrow \{\theta + \alpha\}$ — эргодическое преобразование, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sigma_1 + \cdots + \ln \sigma_n}{n} = \int_0^1 \ln \sigma_0 d\theta > 0$$

для почти всех θ по эргодической теореме Биркгофа. Следовательно, для почти всех θ существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_{n,\theta} = c(\theta).$$

Отсюда при $x > 0$

$$\psi(\theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{f}_{n,\theta}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_{n,\theta} x}{c_{n,\theta} x + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{\tilde{c}_{n,\theta} x + (\sigma_{n,\theta})^{-1}} = \frac{1}{c(\theta)} > 0.$$

Убедимся в том, что график функции $\{(\theta, \psi(\theta)), \theta \in [0, 1]\}$ есть $\bar{S}$ -инвариантное множество.

Условие $\bar{S}$ -инвариантности графика любой функции $\psi(\theta)$ эквивалентно уравнению

$$\psi(\{\theta + \alpha\}) = \bar{f}_\theta(\psi(\theta)).$$

Из того, что

$$\psi(\theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{f}_{n,\theta}(x),$$

сразу вытекает, что $\psi(\theta)$ удовлетворяет указанному выше уравнению и, следовательно, график $\{(\theta, \psi(\theta)), \theta \in [0, 1]\}$ является $\bar{S}$ -инвариантным множеством. Теорема 1 доказана.

Построение S -инвариантного графика будем осуществлять по схеме доказательства теоремы 1. А именно, мы покажем, что при

$$\sigma > \bar{\sigma} = 3.6161375 \dots$$

при почти всех θ существует

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{n,\theta}(x) = \varphi(\theta).$$

Нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. Для всех $x > 0$ и всех θ

$$f_{n,\theta}(x) \geq \bar{f}_{n,\theta}(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство будем проводить по индукции. При $n = 1$ нужно показать, что для $x > 0$

$$\operatorname{th} x \geq \frac{x}{x+1}. \quad (3)$$

Это неравенство очевидно при малых x и при больших x . Производная функции $\operatorname{th} x - x/(x+1)$ положительна при $0 < x < x_0$ и отрицательна при $x > x_0$, где x_0 — единственный положительный корень уравнения $1+x = \operatorname{ch} x$. Отсюда следует справедливость (3) при всех x .

Пусть теперь при всех x и всех θ

$$f_{n,\theta}(x) \geq \bar{f}_{n,\theta}(x).$$

Тогда при всех x и всех θ

$$f_{n+1,\theta}(x) = f_{\theta-\alpha}(f_{n,\theta-\alpha}(x)) \geq f_{\theta-\alpha}(\bar{f}_{n,\theta-\alpha}(x)) \geq \bar{f}_{\theta-\alpha}(\bar{f}_{n,\theta-\alpha}(x)) = \bar{f}_{n+1,\theta}(x).$$

Доказательство леммы 1 закончено.

Для доказательства существования предела последовательности $f_{n,\theta}(x)$ при $n \rightarrow +\infty$ мы будем использовать вариант метода сжатых отображений. Для этого нужно будет оценить производную $f'_{n,\theta}(x)$.

ЛЕММА 2. Для любого $\rho > 0$ при $x > 0$ и при всех θ справедливо неравенство

$$f'_{\theta}(x) \leq d_{\rho} \sigma_0^{1-\rho} (\bar{f}'_{\theta}(x))^{\rho}, \quad \text{где } d_{\rho} = (1+x_{\rho})^{2\rho} / \operatorname{ch}^2 x_{\rho},$$

и x_{ρ} — единственный положительный корень уравнения

$$\frac{\rho}{1+x} = \operatorname{th} x. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f'_{\theta}(x) = \sigma_0 / \operatorname{ch}^2 x$, то, следовательно, необходимо доказать при $x > 0$ неравенство

$$d_{\rho} \geq \frac{(1+x)^{2\rho}}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Это неравенство будет следовать из того, что

$$\max_{x \geq 0} \frac{(1+x)^{2\rho}}{\operatorname{ch}^2 x} = d_{\rho}.$$

Действительно, максимум функции $(1+x)^{2\rho} / \operatorname{ch}^2 x$ достигается в единственной критической точке x_{ρ} этой функции, которая, как легко видеть, является корнем уравнения (4). Лемма 2 доказана.

Оценим теперь производную $f'_{n,\theta}(x)$ при $x > 0$. Имеем

$$f'_{n,\theta}(x) = \prod_{k=1}^n f'_{\theta-k\alpha}(f_{n-k,\theta-k\alpha}(x)), \quad f'_{\theta}(x) = \frac{\sigma_0(\theta)}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Поскольку $f_{n,\theta}(x) \geq \bar{f}_{n,\theta}(x)$ при $x \geq 0$ и $f'_\theta(x)$ — убывающая функция при почти всех θ , то

$$f'_{n,\theta}(x) \leq \prod_{k=1}^n f'_{\theta-k\alpha}(\bar{f}_{n-k,\theta-k\alpha}(x)).$$

Из утверждения леммы 2 следует, что

$$\frac{1}{n} \ln f'_{n,\theta}(x) \leq \ln d_\rho + \frac{(1-\rho)}{n} \sum_{k=1}^n \ln \sigma_k + \frac{\rho}{n} \sum_{k=1}^n \ln \bar{f}'_{\theta-k\alpha}(\bar{f}_{n-k,\theta-k\alpha}(x)).$$

Отсюда

$$\frac{1}{n} \ln f'_{n,\theta}(x) \leq \ln d_\rho + \frac{1-\rho}{n} \sum_{k=1}^n \ln \sigma_k + \frac{\rho}{n} \ln \bar{f}'_{n,\theta}(x).$$

Так как при почти всех θ

$$\bar{f}'_{n,\theta}(x) = \left(\frac{\sigma_{n,\theta} x}{c_{n,\theta} x + 1} \right)' = \frac{\sigma_{n,\theta}^{-1}}{(\tilde{c}_{n,\theta} x + \sigma_{n,\theta}^{-1})^2},$$

то при $n > n_0(\theta)$, $x > e^{-Ln}$, $L > 0$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln \bar{f}'_{n,\theta}(x) &\leq -\frac{\rho}{n} \sum_{k=1}^n \ln \sigma_k - \frac{2\rho}{n} \ln (\tilde{c}_{n,\theta} x + \sigma_{n,\theta}^{-1}) \\ &\leq -\frac{\rho}{n} \sum_{k=1}^n \ln \sigma_k - \frac{2\rho}{n} \ln \left(\frac{c(\theta)}{2} x + \sigma_{n,\theta}^{-1} \right). \end{aligned}$$

Поэтому при $n > n_0(\theta)$, $x > e^{-Ln}$ почти всюду по θ

$$\frac{1}{n} \ln f'_{n,\theta}(x) \leq \ln d_\rho + \frac{(1-2\rho)}{n} \sum_{k=1}^n \ln \sigma_k - \frac{2\rho}{n} \ln \left(\frac{c(\theta)}{2} e^{-Ln} + \sigma_{n,\theta}^{-1} \right). \quad (5)$$

Пусть теперь $L < \ln(\sigma/2)$. Найдем предел правой части неравенства (5). Этот предел равен

$$\begin{aligned} \ln d_\rho + (1-2\rho) \ln \frac{\sigma}{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\rho}{n} \ln \left(\frac{c(\theta)}{2} e^{-Ln} + \sigma_{n,\theta}^{-1} \right) \\ = \ln d_\rho + (1-2\rho) \ln \frac{\sigma}{2} + 2\rho L. \end{aligned}$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ при $n > n_1(\theta, \varepsilon)$

$$\frac{1}{n} \ln f'_{n,\theta}(x) \leq \ln d_\rho + (1-2\rho) \ln \frac{\sigma}{2} + 2\rho L + \varepsilon \quad (6)$$

при почти всех θ .

Найдем теперь

$$-\chi_1(\sigma) = \min_{\rho > 0} [\ln d_\rho + (1-2\rho) \ln(\sigma/2)].$$

Дифференцируя функцию $\ln d_\rho + (1 - 2\rho) \ln(\sigma/2)$, с учетом (4) получаем, что минимум этой функции достигается, если $1 + x_\rho = \sigma/2$. Отсюда, вновь используя (4), имеем

$$\rho = \frac{\sigma}{2} \operatorname{th} \frac{\sigma - 2}{2}.$$

Следовательно,

$$-\chi_1(\sigma) = -2 \ln \left(\operatorname{ch} \frac{\sigma - 2}{2} \right) + \ln \frac{\sigma}{2}.$$

Пусть $\bar{\sigma}$ таково, что $\chi_1(\bar{\sigma}) = 0$. Тогда $\bar{\sigma} = 2 + 2\delta$, где δ — единственный положительный корень уравнения $1 + \delta = \operatorname{ch}^2 \delta$. Из этого уравнения получаем, что $\bar{\sigma} = 3.6161375 \dots$. Легко видеть, что $\chi_1(\sigma) > 0$ при $\sigma > \bar{\sigma}$. Поэтому если $\sigma > \bar{\sigma}$, то, выбирая ε и L достаточно малыми, получаем из (6) при $n \geq n_2(\theta) = n_1(\theta, \varepsilon)$, $x > e^{-Ln}$, что

$$\frac{1}{n} \ln f'_{n,\theta}(x) \leq -\chi(\sigma) < 0,$$

где $-\chi(\sigma) = -\chi_1(\sigma) + (\sigma \operatorname{th}((\sigma - 2)/2))L + \varepsilon$.

Полученное неравенство сформулируем в виде леммы.

ЛЕММА 3. *Существует такое L , что при $n > n_2(\theta)$, $x > e^{-Ln}$, $\sigma > \bar{\sigma}$ при почти всех θ*

$$f'_{n,\theta}(x) \leq e^{-n\chi(\sigma)}, \quad \chi(\sigma) > 0.$$

Докажем теперь еще одну лемму.

ЛЕММА 4. *При $\sigma > \bar{\sigma}$ существуют для почти всех θ положительные константы L, R , такие, что если $e^{-Ln} < x$, то при всех n , начиная с некоторого $N(\theta)$, справедливо неравенство*

$$|f_{n+1,\theta}(x) - f_{n,\theta}(x)| \leq e^{-Rn} x.$$

При этом R зависит от θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $f_{n,\theta}(x)$ следует, что

$$|f_{n+1,\theta}(x) - f_{n,\theta}(x)| = \left| \int_x^{f_{\theta-(n+1)\alpha}(x)} f'_{n,\theta}(y) dy \right|.$$

Если $f_{\theta-(n+1)\alpha}(x) < \delta_n$, то из определения функции $f_\theta(x)$ получаем, что

$$\text{либо } \|\theta - (n+1)\alpha - 1/4\| \leq C_1 \delta_n, \quad \text{либо } \|\theta - (n+1)\alpha - 3/4\| \leq C_1 \delta_n$$

для некоторой константы C_1 . Здесь $\|x\| = \min\{\{x\}, 1 - \{x\}\}$.

При $\delta_n = e^{-bn}$ множество тех θ , для которых эти неравенства выполняются только конечное число раз, по лемме Бореля–Кантелли имеет лебегову меру 1. По лемме (3) при $x > e^{-Ln}$, $\sigma > \bar{\sigma}$ и $n > N(\theta)$ при почти всех θ справедлива оценка $f'_{n,\theta}(x) < e^{-\chi(\sigma)n}$. Поэтому найдется константа $R = R(\theta) > 0$, такая, что

$$|f_{n+1,\theta}(x) - f_{n,\theta}(x)| \leq e^{-\chi(\theta)n}(x + f_{\theta-(n+1)\alpha}(x)) \leq e^{-Rn} x.$$

ТЕОРЕМА 2. *Если $\sigma > \bar{\sigma}$, то для почти всех θ существует предел*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,\theta}(x) = \varphi(\theta)$$

для $x > 0$. График $(\theta, \varphi(\theta))$ есть S -инвариантное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m = n + k$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда, используя лемму 4, получаем

$$|f_{m,\theta}(x) - f_{n,\theta}(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n+k,\theta}(x) - f_{n+k+1,\theta}(x)| \leq \frac{x}{1 - e^{-R}} e^{-Rn}$$

при больших n .

Отсюда следует, что предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,\theta}(x)$ существует.

Далее, для фиксированных x и y ($x > e^{-Ln}$, $y > e^{-Ln}$) по лемме 3 имеем при почти всех θ

$$|f_{n,\theta}(x) - f_{n,\theta}(y)| \leq |x - y| e^{-\chi(\theta)n}$$

при достаточно больших n .

Поэтому для почти всех θ при $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,\theta}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,\theta}(y) = \varphi(\theta). \quad (7)$$

Условие S -инвариантности графика $\{(\theta, \varphi(\theta)), \theta \in [0, 1]\}$ функции $\varphi(\theta)$ эквивалентно тому, что

$$\varphi(\{\theta + \alpha\}) = f_{\theta}(\varphi(\theta)).$$

Из (7) следует, что функция $\varphi(\theta)$ удовлетворяет написанному выше равенству. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как $f_{n,\theta}(x) \geq \bar{f}_{n,\theta}(x)$, то $\varphi(\theta) \geq \psi(\theta) > 0$ для почти всех θ .

Рассмотрим стационарный процесс $(\theta_n, \varphi(\theta_n))$, где θ_n имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

Покажем теперь, что этот стационарный процесс является единственным стационарным процессом, удовлетворяющим уравнениям (2), для которого $P(X_n = 0) = 0$.

Рассмотрим любой стационарный процесс (θ_n, X_n) , удовлетворяющий уравнениям (2) и такой, что $P(X_n = 0) = 0$. Пусть $P(\theta, \Delta)$ — условная вероятность того, что $X_0 \in \Delta$ при условии, что фиксировано $\theta_0 = \theta$.

Заметим, что при почти всех θ условное распределение $P(\theta, \Delta)$ сосредоточено в интервале $(0, \varphi(\theta)]$. Это следует из того, что $X_0 = f_{n,\theta}(X_{-n})$ при почти всех θ и что, как было уже показано, при больших n область значений функции $f_{n,\theta}(x)$ есть почти отрезок $(0, \varphi(\theta)]$.

Из стационарности процесса (θ_n, X_n) и из (1) следует, что

$$P(\theta, \Delta) = P(\theta - n\alpha, f_{n,\theta}^{-1}(\Delta)).$$

Рассмотрим $\Delta \subseteq (0, \varphi(\theta))$. Пусть $f_{n,\theta}^{-1}(\Delta) = \Delta_n$.

При больших n для некоторой константы $\beta > 0$ имеем $\Delta_n \subseteq (0, e^{-n\beta})$.

Рассмотрим теперь множество $A_{\varepsilon} = \{x : 0 \leq x < \varepsilon\}$. Из условия $P(X_n = 0) = 0$ получаем, что $P(A_{\varepsilon}) = \delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Отсюда следует, что существует множество B_{ε} , такое, что для любого $\theta \in B_{\varepsilon}$

$$P(\theta, A_{\varepsilon}) < \sqrt{\delta(\varepsilon)} \quad \text{и} \quad P(B_{\varepsilon}) > 1 - \sqrt{\delta(\varepsilon)}.$$

Действительно, рассмотрим множество

$$\bar{B}_{\varepsilon} = \{\theta : P(\theta, A_{\varepsilon}) \geq \sqrt{\delta(\varepsilon)}\}.$$

Тогда

$$P(\bar{B}_\varepsilon) \leq \frac{1}{\sqrt{\delta(\varepsilon)}} \int P(\theta, A_\varepsilon) d\theta = \sqrt{\delta(\varepsilon)}.$$

Имеем $\Delta_n \subseteq (0, \varepsilon)$, если $e^{-n\beta} < \varepsilon$. Отсюда следует, что при достаточно больших n

$$P(\theta_{-n}, \Delta_n) \leq P(\theta_{-n}, A_\varepsilon).$$

Известно [3], что существует строго возрастающая последовательность $\{n_k(\theta)\}$, такая, что $\theta_{-n_k} \in B_\varepsilon$. Отсюда следует, что при больших k

$$P(\theta_{-n_k}, \Delta_{n_k(\theta)}) \leq P(\theta_{-n_k}, A_\varepsilon) \leq \sqrt{\delta(\varepsilon)}.$$

Но $P(\theta, \Delta) = P(\theta_{-n_k}, \Delta_{n_k(\theta)})$. Поэтому $P(\theta, \Delta) \leq \sqrt{\delta(\varepsilon)}$ для любого $\varepsilon > 0$. А это означает, что $P(\theta, \Delta) = 0$ для любых $\Delta \subseteq (0, \varphi(\theta))$. Следовательно, $P(\theta, \varphi(\theta)) = 1$.

§3. О процессе $(\theta_n, \tilde{X}_n)$

В этом параграфе мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Если α иррационально и $\sigma > \bar{\sigma}$, то существует единственный стационарный процесс $(\theta_n, \tilde{X}_n)$, удовлетворяющий уравнениям (1) и такой, что $P(\tilde{X}_n = 0) = 0$. При этом процесс $\tilde{X}_n$ имеет чисто непрерывный сингулярный спектр.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим процесс $|\tilde{X}_n|$. Стационарный процесс $|\tilde{X}_n|$ удовлетворяет уравнениям (2) и, как было показано, $P(\theta, \varphi(\theta)) = 1$, т. е. $|\tilde{X}_n| = \varphi(\theta_n)$.

Пусть $Y_n = \text{sign } \tilde{X}_n$. Тогда Y_n — стационарный процесс, удовлетворяющий уравнениям

$$Y_{n+1} = \varepsilon(\theta_n) Y_n, \quad \theta_{n+1} = \{\theta_n + \alpha\},$$

$$\varepsilon(\theta) = \text{sign}(\cos 2\pi\theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < 1/4, \quad 3/4 < \theta < 1, \\ -1, & 1/4 < \theta < 3/4. \end{cases}$$

Для стационарного процесса $\tilde{X}_n$ величина Y_n принимает два значения $-1, 1$. Пусть

$$p(\theta, y) = P(Y_0 = y \mid \theta_0 = \theta).$$

Введем динамическую систему $\{T^n\}$, где преобразование T действует в пространстве пар (θ, y) , таких, что y принимает два значения $-1, 1$, по правилу

$$T: (\theta, y) \rightarrow (\{\theta + \alpha\}, \varepsilon(\theta)y).$$

Определим инвариантную меру μ как прямое произведение меры Лебега на $[0, 1]$ и равномерной меры на двухточечном множестве $\{-1, 1\}$.

Из определения функций $p(\theta, y)$ и стационарности процесса Y_n следует, что

$$p(\theta + \alpha, \varepsilon(\theta)y) = p(\theta, y),$$

т.е. $p(\theta, y)$ есть T -инвариантная функция. Хорошо известно [3, 4], что T — эргодическое преобразование, т.е. каждая T -инвариантная функция есть константа. Поэтому почти всюду $p(\theta, y) = 1/2$, так как $\sum_y p(\theta, y) = 1$.

Процесс Y_n можно считать функцией на пространстве пар (θ, y) , а именно

$$Y_n = \prod_{k=0}^{n-1} \varepsilon(\theta + k\alpha) Y_0, \quad \text{где } Y_0 = Y_0(\theta, y) = y.$$

При таком задании процесса $Y_n = Y_0(T^n(\theta, y))$. Исходный процесс $\tilde{X}_n$ может быть представлен в следующем виде:

$$\tilde{X}_n = \tilde{X}_0(T^n(\theta, y)), \quad \text{где } \tilde{X}_0(\theta, y) = \varphi(\theta)Y_0(\theta, y).$$

Следовательно, спектральная мера процесса $\tilde{X}_n$ есть спектральная мера функции $\tilde{X}_0(\theta, y)$ относительно динамической системы $\{T^n\}$, так как

$$E\tilde{X}_n\tilde{X}_0 = \int \tilde{X}_0(T^n(\theta, y))\tilde{X}_0(\theta, y) d\mu(\theta, y).$$

Заметим, что подпространство $H \subset L_2(\mu)$ функций вида $F(\theta)Y_0(\theta, y)$ инвариантно относительно динамической системы $\{T^n\}$. Функция $\tilde{X}_0 = \varphi(\theta)Y_0(\theta, y)$ принадлежит H (так как $\varphi(\theta)$ неотрицательная и ограниченная).

Оператор $U: F(\theta, y) \rightarrow F(T(\theta, y))$ динамической системы T в пространстве $L_2(\mu)$ имеет в H непрерывный спектр [3, 4].

Кроме того, известно, что в инвариантном пространстве H спектр оператора U сингулярен (см. [1]). Отсюда следует, что процесс X_n имеет непрерывный чисто сингулярный спектр. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агеев О. Н. Перемешивание в компонентах переключивания $T_{\alpha, \beta}$. УМН, **49**, вып. 2, 143–144 (1994).
2. Grebogi C., Oti E., Pelican S., Yourke J. A. Strange attractors that are not chaotic. Phys. D, **13**, 261–268 (1984).
3. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. П. Эргодическая теория. Наука, М., 1980.
4. Оселедец В. И. О спектре эргодических автоморфизмов. ДАН СССР, **168**, №5, 1009–1011 (1966).
5. Pikovski A. S., Feudel U. Correlations and spectra of strange non-chaotic attractors. J. Phys A: Math. Gen., 5209–5219 (1994).
6. Pikovski A. S., Zaks M. A., Feudel U., Kurths J. Singular Continuous Spectra in Dissipative Dynamics. Preprint, Max-Planck-Arbeitsgruppe “Nichtlineare Dynamik”, December 9, 1994, pp. 1–25.
7. Pikovski A. S., Feudel U. Characterizing strange nonchaotic attractors. Chaos, **5**, 235–260 (1995).

Московский государственный институт
электроники и математики (МГИЭМ)
Московский государственный университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
11 сентября 1995 г.