Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Натанзон, Пространства модулей вещественных алгебраических суперкривых с $N = 2$, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 4, 19–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa547>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:42:27

УДК 515.171.179.8

Пространства модулей вещественных алгебраических суперкривых с $N = 2$ ^{*}

© 1996. С. М. НАТАНЗОН

Введение

Суперкривые с числом нечетных координат $N = 1, 2$ возникли в работах [1, 2, 10, 11] как основной объект теории струн. Топологическая структура пространства модулей комплексных суперкривых и римановых суперповерхностей исследована в [4, 13]. Пространства модулей вещественных суперкривых с $N = 1$ исследованы в [5, 14].

В настоящей работе исследуется топологическая структура пространства модулей вещественных суперкривых с $N = 2$. Найден полный набор топологических инвариантов, описывающих компоненты связности пространства модулей. Каждая компонента представлена в виде фактора $\mathbb{R}^{(m|n)}/\text{Mod}$ линейного суперпространства по дискретной группе. Попутно описана топологическая структура пространства модулей спинорных расслоений ранга 2 (в смысле [8, 12]) над вещественными алгебраическими кривыми.

§1. Основные определения

1. Пусть $L(K)$ — грасманова алгебра над полем K с бесконечным числом образующих $1, e_1, e_2, \dots$. Каждый элемент $a \in L(K)$ является конечной линейной комбинацией мономов $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ с коэффициентами из K , т.е.

$$a = a^\# + \sum a_i e_i + \sum a_{ij} e_i \wedge e_j + \dots$$

Соответствие $a \mapsto a^\#$ определяет эпиморфизм $\#: L(K) \rightarrow K$.

Моном $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} \neq 0$ называется четным, если n четно, и нечетным, если n нечетно. Линейные комбинации четных (нечетных) мономов порождают линейное пространство $L_0(K)$ четных ($L_1(K)$ нечетных) элементов алгебры $L(K)$. Супераналог линейного пространства — это множество

$$K^{(n|m)} = \{(z_1, \dots, z_n \mid \theta_1, \dots, \theta_m) : z_i \in L_0(K), \theta_j \in L_1(K)\}.$$

В качестве поля K будет рассматриваться поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ или поле вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Множество

$$H = \{(z \mid \theta_1, \theta_2) \in \mathbb{C}^{(1|2)} : \text{Im } z^\# > 0\}$$

^{*} Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95-01-01122а) и Международного научного фонда (грант MD8300).

называется суперполуплоскостью с $N = 2$. Группа $\text{Aut}(H)$ его суперголоморфных автоморфизмов совпадает с $PSpO(2|2, \mathbb{R})$ [2] и состоит из отображений $A = A[a, b, c, d, l, \varepsilon, \delta]$, таких, что

$$A(z | \theta_1, \theta_2) = \left(\frac{az + b + \delta^{11}\theta_1 + \delta^{12}\theta_2}{cz + d + \delta^{21}\theta_1 + \delta^{22}\theta_2} \mid \frac{l^{11}\theta_1 + l^{12}\theta_2 + \varepsilon^{11}z + \varepsilon^{12}}{cz + d + \delta^{21}\theta_1 + \delta^{22}\theta_2}, \frac{l^{21}\theta_1 + l^{22}\theta_2 + \varepsilon^{21}z + \varepsilon^{22}}{cz + d + \delta^{21}\theta_1 + \delta^{22}\theta_2} \right),$$

где $a, b, c, d \in L_0(\mathbb{R})$, $l \in GL(2, L_0(\mathbb{R}))$, $\varepsilon, \delta \in GL(2, L_1(\mathbb{R}))$,

$$\begin{pmatrix} -c & a \\ -d & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{11} & \delta^{12} \\ \delta^{21} & \delta^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{11} & \varepsilon^{12} \\ \varepsilon^{21} & \varepsilon^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l^{11} & l^{12} \\ l^{21} & l^{22} \end{pmatrix},$$

$$ad - bc - \varepsilon^{11}\varepsilon^{22} - \varepsilon^{21}\varepsilon^{12} = l^{11}l^{22} + l^{12}l^{21} + \delta^{11}\delta^{22} + \delta^{12}\delta^{21} = \Delta, \quad \Delta^\# > 0,$$

$$l^{11}l^{21} + \delta^{11}\delta^{21} = l^{12}l^{22} + \delta^{12}\delta^{22} = 0.$$

Соответствие $(z | \theta_1, \theta_2) \mapsto z^\#$ переводит H в обычную верхнюю полуплоскость $H^\# = \{z^\# \in \mathbb{C} : \text{Im } z^\# > 0\}$ и A в автоморфизм $A^\# = \#(A) \in \text{Aut}(H^\#) \cong PSL(2, \mathbb{R})$, такой, что

$$A^\# z^\# = \frac{a^\# z^\# + b^\#}{c^\# z^\# + d^\#}.$$

Подгруппа $\Gamma \subset H$ называется суперфуксовой, если $\Gamma^\#$ — фуксова группа и ограничение $\#$ на Γ индуцирует изоморфизм $\#: \Gamma \rightarrow \Gamma^\#$. Мы рассматриваем лишь подгруппы Γ , состоящие из гиперболических элементов $\gamma \in \Gamma$, т.е. таких элементов, что $\gamma^\#$ имеет две неподвижные точки на $\mathbb{R}$.

В этом случае $P = H/\Gamma$ называется римановой суперповерхностью с $N = 2$. Суперповерхности $P_1 = H/\Gamma_1$ и $P_2 = H/\Gamma_2$ считаются совпадающими, если $\Gamma_1 = \gamma\Gamma_2\gamma^{-1}$, где $\gamma \in \text{Aut}(H)$.

Проекция $\#: H \rightarrow H^\#$ индуцирует проекцию $\#: P \rightarrow P^\#$ на обычную риманову поверхность $P^\# = H^\#/\Gamma^\#$. Мы считаем, что Γ конечно порождена, т.е. $P^\#$ — поверхность рода g с n дырами.

Комплексной алгебраической суперкривой с $N = 2$ называется риманова суперповерхность P с $N = 2$, такая, что $P^\#$ — комплексная алгебраическая кривая, т.е. $P^\#$ — компакт. Согласно [13], пространство модулей комплексных суперкривых с $N = 2$ рода $g > 1$ распадается на 6 компонент связности вида $\mathbb{R}^{(n|m)}/\text{Mod}$, где Mod — дискретная группа. Для двух из них $(n|m) = (8g - 6 | 8g - 8)$. Для остальных $(n|m) = (8g - 8 | 8g - 8)$.

2. Напомним, что вещественной алгебраической кривой называется пара $(P^\#, \tau^\#)$, где $P^\#$ — комплексная алгебраическая кривая, а $\tau^\#: P^\# \rightarrow P^\#$ — антиголоморфная инволюция. Неподвижные точки этой инволюции, т.е. точки из $P^\tau = \{p \in P^\# : \tau^\# p = p\}$, называются вещественными точками кривой $(P^\#, \tau^\#)$.

Две кривые $(P_1^\#, \tau_1^\#)$ и $(P_2^\#, \tau_2^\#)$ считаются совпадающими, если существует биголоморфное отображение $\varphi: P_1^\# \rightarrow P_2^\#$, такое, что $\tau_2^\# = \varphi\tau_1^\#\varphi^{-1}$. Таким образом, кривая $(P^\#, \tau^\#)$ совпадает с кривой вида $(H^\#/\Gamma^\#, \tilde{\Gamma}^\#/\Gamma^\#)$, где

$\tilde{\Gamma}^\# \subset \widetilde{\text{Aut}}(H^\#)$ — подгруппа группы голоморфных и антиголоморфных автоморфизмов полуплоскости $H^\#$ и $\Gamma^\# = \tilde{\Gamma}^\# \cap \text{Aut}(H^\#)$.

Супераналогом группы $\widetilde{\text{Aut}}(H^\#)$ является группа $\widetilde{\text{Aut}}(H)$, порожденная $\text{Aut}(H)$ и отображением $(z | \theta_1, \theta_2) \mapsto (-\bar{z} | \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$. Пусть $\tilde{\Gamma} \subset \widetilde{\text{Aut}}(H)$ — такая подгруппа, что $\Gamma = \tilde{\Gamma} \cap \text{Aut}(H)$ — суперфуксова группа, $\tilde{\Gamma} \neq \Gamma$ и $H^\#/\Gamma^\#$ — компактная поверхность. Тогда пара $(H/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$ называется вещественной алгебраической суперкривой с $N = 2$.

Вещественные суперкривые $(H/\Gamma_1, \tilde{\Gamma}_1/\Gamma_1)$ и $(H/\Gamma_2, \tilde{\Gamma}_2/\Gamma_2)$ считаются совпадающими, если существует $h \in \widetilde{\text{Aut}}(H)$, такой, что $\tilde{\Gamma}_2 = h\tilde{\Gamma}_1 h^{-1}$. Проекция $\#$ переводит вещественную суперкривую $(P, \tau) = (H/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$ в вещественную кривую $(P^\#, \tau^\#) = (H^\#/\Gamma^\#, \tilde{\Gamma}^\#/\Gamma^\#)$.

§2. Топологические инварианты суперкривых

1. Пусть $\Gamma \subset \text{Aut}(H)$ — суперфуксова группа и $P = H/\Gamma$ — отвечающая ей риманова суперповерхность с $N = 2$. Каждый элемент $A \in \Gamma$ сопряжен автоморфизму вида $(z | \theta_1, \theta_2) \mapsto (\lambda z | h^{11}\theta_1 + h^{12}\theta_2, h^{21}\theta_1 + h^{22}\theta_2)$, где $\lambda, h^{ij} \in L_0(\mathbb{R})$, $(h^{11}h^{22})^\# \geq 0$, $(h^{12}h^{21})^\# \geq 0$ и или $h^{11} = h^{22} = 0$, или $h^{12} = h^{21} = 0$.

Определим функции $\Omega_i = \Omega_i(\Gamma): \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ ($i = 1, 2$), положив

$$\Omega_1(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{i,j \in \{1,2\}} (h^{ij})^\# < 0, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\Omega_1(A) + \Omega_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } h^{12} = h^{21} = 0, \\ 1, & \text{если } h^{11} = h^{22} = 0. \end{cases}$$

Изоморфизмы $\Gamma \rightarrow \Gamma^\# \rightarrow \pi_1(P^\#, p)$ переводят Ω_i в $\omega_i = \omega_i(P): \pi_1(P^\#, p) \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Согласно [13], $\omega_i(a) = \omega_i(b)$, если a и b представляют один класс в $H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2)$. Следовательно, ω_i задает функцию $\omega_i: H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, причем, согласно [13], ω_i — функция Арфа, т.е. $\omega_i(a + b) = \omega_i(a) + \omega_i(b) + (a, b)$, где $(a, b) \in \mathbb{Z}_2$ — индекс пересечения в $H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2)$.

Пусть $\{a_i, b_i, i = 1, \dots, g, c_j, j = 1, \dots, n\}$ — псевдосимплектический базис в $H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2)$, т.е. $(a_i, a_j) = (b_i, b_j) = 0$, $(a_i, b_j) = \delta_{ij}$, $(c_i, a_j) = (c_i, b_j) = 0$. Тогда если функция Арфа $\omega: H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ такова, что $\omega(c_i) = 0$ ($i = 1, \dots, n$), то четность $\delta(\omega) \in \mathbb{Z}_2$ суммы $\sum_{i=1}^g \omega(a_i)\omega(b_i)$ не зависит от выбора псевдосимплектического базиса [13]. Для удобства положим $\delta(\omega) = 0$, если $\omega(c_i) = 1$ для некоторого i .

2. Пусть $(P^\#, \tau^\#)$ — вещественная алгебраическая кривая рода g . Напомним [3], что пространство вещественных точек P^τ распадается на простые попарно непересекающиеся замкнутые контуры, называемые овалами. Единственными топологическими инвариантами кривой $(P^\#, \tau^\#)$ являются: 1) род $g(P^\#)$; 2) число овалов $k(P^\#, \tau^\#)$; 3) связность ($\varepsilon(P^\#, \tau^\#) = 0$) или несвязность ($\varepsilon(P^\#, \tau^\#) = 1$) множества $P^\# \setminus P^\tau$. При этом $0 \leq k(P^\#, \tau^\#) \leq g(P^\#)$, если $\varepsilon(P^\#, \tau^\#) = 0$, и $1 \leq k(P^\#, \tau^\#) \leq g(P^\#) + 1$, $k(P^\#, \tau^\#) \equiv g(P^\#) + 1 \pmod{2}$, если $\varepsilon(P^\#, \tau^\#) = 1$.

Кроме овалов, на вещественной алгебраической кривой $(P^\#, \tau^\#)$ удобно рассматривать псевдоовалы, т.е. простые контуры $c \subset P^\# \setminus P^\tau$, такие, что $\tau^\# c = c$.

Пусть $(P, \tau) = (H/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$ — вещественная суперкривая с $N = 2$ и $C \subset \Gamma$ отвечает овалу или псевдоовалу c . Заменяя Γ на сопряженную группу, можно считать, что $C(z | \theta_1, \theta_2) = (\lambda z | h^1 \theta_j, h^2 \theta_{3-j})$. В этом случае группа $\tilde{\Gamma}$ содержит элемент S_C вида $S_C(z | \theta_1, \theta_2) = (-\rho \bar{z} | l^1 \bar{\theta}_i, l^2 \bar{\theta}_{3-i})$, где $\rho^\# > 0$. Положим $\mu(c) = 0$, если $i = 1$, и $\mu(c) = 1$, если $i = 2$.

Если $\omega_1 = \omega_2$ (где $\omega_i = \omega_i(P)$), то $\mu(c)$ одинаково для всех овалов и псевдоовалов c , что позволяет определить инвариант $\mu(P, \tau) = \mu(c)$.

Если $\omega_1 \neq \omega_2$, то ядро гомоморфизма $(\Omega_1 + \Omega_2) : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$ образует подгруппу Γ_* индекса 2. На поверхности $P^\# = H^\#/\Gamma_*^\#$ инволюции из множества $\{F = S_C : \mu(c) = \mu\}$ порождают инволюцию $\tau_\mu^\#$ ($\mu \in \mathbb{Z}_2$). Положим $\rho_\mu(P, \tau) = \varepsilon(P^\#, \tau_\mu^\#)$.

3. Отнесем к множеству $M(g, \varepsilon)$ вещественные алгебраические суперкривые (P, τ) с $N = 2$, такие, что $g(P^\#) = g$, $\varepsilon(P^\#, \tau^\#) = \varepsilon \in \mathbb{Z}_2$. Структура суперкривой с $N = 2$ задает две функции Арфа $\omega_i = \omega_i(P) : H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Положим $\chi(P) = 0$, если $\omega_1 = \omega_2$, и $\chi(P) = 1$, если $\omega_1 \neq \omega_2$. Инвариант $\chi \in \mathbb{Z}_2$ разбивает $M(g, \varepsilon)$ на подмножества $M(g, \varepsilon, \chi) = \{(P, \tau) \in M(g, \varepsilon) : \chi(P) = \chi\}$.

Согласно [7], число овалов $c \in P^\tau$ со свойствами $\omega_i(c) = 0$ имеет ту же четность, что $g + 1$. Для $(P, \tau) \in M(g, 0, 0)$ обозначим через $k_\alpha(P, \tau)$ число овалов $c \subset P^\tau$, таких, что $\omega_1(c) = \omega_2(c) = \alpha \in \mathbb{Z}_2$. Разобьем множество $M(g, 0, 0)$ на подмножества

$$\begin{aligned} M(g, 0, 0, k_\alpha, \delta, \mu) \\ = \{(P, \tau) \in M(g, 0, 0) : k_\alpha(P, \tau) = k_\alpha, \delta(\omega_1) = \delta(\omega_2) = \delta, \mu(P, \tau) = \mu\}. \end{aligned}$$

Для $(P, \tau) \in M(g, 0, 1)$ обозначим через $k_{\alpha\beta}^\mu(P, \tau)$ число овалов $c \subset P^\tau$, таких, что

$$\omega_1(c) = \alpha, \quad \omega_2(c) = \beta, \quad \mu(c) = \mu \in \mathbb{Z}_2.$$

Положим

$$\begin{aligned} M(g, 0, 1, k_{\alpha\beta}^\mu, \delta_i, \rho_i) \\ = \{(P, \tau) \in M(g, 0, 1) : k_{\alpha\beta}^\mu(P, \tau) = k_{\alpha\beta}^\mu, \delta(\omega_i) = \delta_i, \rho_i(P, \tau) = \rho_i\}. \end{aligned}$$

Согласно [6, теорема 6.1; 9], $M(g, 0, 1, k_{\alpha\beta}^\mu, \delta_i, \rho_i) = 0$, если $\rho_1 = \rho_2 = 1$ или если $k_{01}^0 + k_{10}^0 + k_{01}^1 + k_{10}^1 > 0$ и $\rho_1 + \rho_2 > 0$.

4. Пусть $(P^\#, \tau^\#)$ — вещественная алгебраическая кривая, такая, что $\varepsilon(P^\#, \tau^\#) = 1$, и $\omega : H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ — функция Арфа, такая, что $\omega(\tau^\# a) = \omega(a)$ для всех $a \in H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2)$. Овалы $c_1, \dots, c_k$ разбивают $P^\#$ на компоненты $P_1^\#$ и $P_2^\#$. Положим $\eta_\omega(P^\#, \tau^\#) = \delta(\omega')$, где ω' — ограничение ω на $P_1^\#$. В частности, $\eta_\omega(P^\#, \tau^\#) = 0$, если существует овал c , такой, что $\omega(c) = 1$. Соединим овалы c_i и c_j отрезками l_{ij} и $\tilde{l}_{ij} \in P_1^\#$. Положим $a_{ij} = l_{ij} \cup \tau^\# l_{ij}$ и $\tilde{a}_{ij} = \tilde{l}_{ij} \cup \tau^\# \tilde{l}_{ij}$.

ЛЕММА 2.1. $\omega(a_{ij}) = \omega(\tilde{a}_{ij})$ и $\omega(a_{ij}) = \omega(a_{ik}) + \omega(a_{kj})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b \subset P_1^\#$ — замкнутый контур, состоящий из отрезков l_{ij} , $\tilde{l}_{ij}$ и частей овалов. Тогда $\omega(a_{ij} + \tilde{a}_{ij}) = \omega(b + \tau^\# b) = 2\omega(b) = 0$,

откуда $\omega(a_{ij}) = \omega(a_{ij} + \tilde{a}_{ij}) + \omega(\tilde{a}_{ij}) = \omega(\tilde{a}_{ij})$. Аналогично, если $c \in P_1^\#$ — контур, состоящий из отрезков l_{ij} , l_{jk} , l_{ki} и частей овалов, то $\omega(a_{ij} + a_{jk} + a_{ki}) = \omega(c + \tau^\# c) = 2\omega(c) = 0$, откуда $\omega(a_{ij}) = \omega(a_{ik}) + \omega(a_{kj})$. $\square$

Суперкривая $(P, \tau) \in M(g, 1)$ порождает на кривой $(P^\#, \tau^\#)$ функцию Арфа ω_1 , удовлетворяющую условиям леммы 2.1. Это позволяет корректно определить для овалов $c_i, c_j \subset P^\tau$ величину $\xi(c_i, c_j) = \omega_1(a_{ij})$.

Для $(P, \tau) \in M(g, 1, 0)$ обозначим через $k_\alpha^\gamma(P, \tau)$ число овалов c_i , таких, что $\omega_1(c_i) = \alpha$ и $\xi(c_1, c_i) = \gamma$. Набор чисел $k_\alpha^\gamma = k_\alpha^\gamma(P, \tau)$ определен с точностью до перестановки $k_\alpha^\gamma \mapsto k_\alpha^{1-\gamma}$, связанной с выбором c_1 .

Положим

$$M(g, 1, 0, k_\alpha^\gamma, \eta, \mu) = \{(P, \tau) \in M(g, 1, 0) : k_\alpha^\gamma(P, \tau) = k_\alpha^\gamma, \eta_{\omega_1}(P, \tau) = \eta, \mu(P, \tau) = \mu\}.$$

Пусть теперь $(P, \tau) \in M(g, 1, 1)$. Обозначим через $k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}(P, \tau)$ число овалов $c_i \subset P^\tau$, таких, что $\omega_1(c_i) = \alpha$, $\omega_2(c_i) = \beta$, $\xi(c_1, c_i) = \gamma$ и $\mu(c_i) = \mu$. Набор чисел $k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu} = k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}(P, \tau)$ определен с точностью до перестановки $k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu} \mapsto k_{\alpha\beta}^{1-\gamma\mu}$, связанной с выбором c_1 . Положим

$$M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}, \eta_i) = \{(P, \tau) \in M(g, 1, 1) : k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}(P, \tau) = k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}, \eta_{\omega_i}(P, \tau) = \eta_i\}.$$

Таким образом, мы получили следующий результат:

ТЕОРЕМА 2.1. (1) Множество $M(g, \varepsilon, 0)$ вещественных суперкривых (P, τ) рода g , таких, что $\omega_1(P) = \omega_2(P)$, распадается на подмножества $M(g, 0, 0, k_\alpha^\gamma, \delta, \mu)$, $M(g, 1, 0, k_\alpha^\gamma, \eta, \mu)$, где $\alpha, \gamma, \delta, \eta, \mu \in \mathbb{Z}_2$, $0 \leq k_0 + k_1 \leq g$, $1 \leq \sum_{\alpha, \gamma} k_\alpha^\gamma \leq g + 1$, $\sum_{\alpha, \gamma} k_\alpha^\gamma \equiv g + 1 \pmod{2}$, $k_0 \equiv g + 1 \pmod{2}$, $k_0^0 + k_0^1 \equiv g + 1 \pmod{2}$ и $\eta = 0$ при $k_1^0 + k_1^1 > 0$. Среди них совпадают лишь множества $M(g, 1, 0, k_\alpha^\gamma, \eta, \mu)$ и $M(g, 1, 0, k_\alpha^{1-\gamma}, \eta, \mu)$.

(2) Множество $M(g, \varepsilon, 1)$ вещественных суперкривых (P, τ) рода g , таких, что $\omega_1(P) \neq \omega_2(P)$, распадается на подмножества $M(g, 0, 1, k_{\alpha\beta}^\mu, \delta_i, \rho_i)$, $M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}, \eta_i)$, где $\alpha, \beta, \gamma, \mu, i, \delta_i, \rho_i, \eta_i \in \mathbb{Z}_2$, $0 \leq \sum_{\alpha, \beta, \mu} k_{\alpha\beta}^\mu \leq g$, $1 \leq \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \mu} k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu} \leq g + 1$, $\sum_{\alpha, \beta, \gamma, \mu} k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu} \equiv g + 1 \pmod{2}$, $\sum_{\mu, \beta} k_{0\beta}^\mu \equiv \sum_{\mu, \alpha} k_{\alpha 0}^\mu \equiv \sum_{\gamma, \mu, \beta} k_{0\beta}^{\gamma\mu} \equiv \sum_{\gamma, \mu, \alpha} k_{\alpha 0}^{\gamma\mu} \equiv g + 1 \pmod{2}$, $\rho_1 + \rho_2 < 2$, $\rho_1 = \rho_2 = 0$ при $k_{01}^0 + k_{01}^1 + k_{10}^0 + k_{10}^1 > 0$, $\eta_1 = 0$ при $\sum_{\alpha, \gamma, \mu} k_{1\beta}^{\gamma\mu} > 0$ и $\eta_2 = 0$ при $\sum_{\alpha, \gamma, \mu} k_{\alpha 1}^{\gamma\mu} > 0$. Среди них совпадают лишь множества $M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}, \eta_i)$ и $M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{1-\gamma\mu}, \eta_i)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ниже мы покажем, что каждому из множеств, описанных в теореме 2.1, отвечает компонента связности пространства модулей вещественных суперкривых с $N = 2$ и, следовательно, набор описанных инвариантов полон. Каждой компоненте связности отвечает топологический тип неособой пары функций Арфа в смысле [7]. Все такие типы представлены одним или двумя множествами. Совпадающий тип имеют пары

$$\begin{aligned} & (M(g, 1, 0, k_\alpha^\gamma, \eta, 0), M(g, 1, 0, k_\alpha^\gamma, \eta, 1)), \\ & (M(g, 1, 0, k_{\alpha\beta}^\mu, \delta_i, \rho_i), M(g, 1, 0, k_{\alpha\beta}^{1-\mu}, \delta_i, \rho_i)), \\ & (M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}, \delta_i), M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{1-\gamma\mu}, \delta_i)). \end{aligned}$$

Отметим в связи с этим неточность в теореме 4.4 из [7]: при $k_{01} + k_{10} > 0$ инвариант $k_{\alpha\beta}$ необходимо разбить на неупорядоченную пару инвариантов $k_{\alpha\beta}^\mu$ ($\mu \in \mathbb{Z}_2$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Сопоставим автоморфизму $A = A[a, b, c, l, \varepsilon, \delta] \in \text{Aut}(H)$ автоморфизм

$$A^*(z | \theta_1, \theta_2) = \left(\frac{a^\# z + b^\#}{c^\# z + d^\#} \mid \frac{(l^{11})^\# \theta_1 + (l^{12})^\# \theta_2}{(c^\# z + d^\#)^{-1}}, \frac{(l^{21})^\# \theta_1 + (l^{22})^\# \theta_2}{(c^\# z + d^\#)^{-1}} \right)$$

множества $H^* = H \times C^2$. Соответствие $*$ переводит комплексную суперкривую P с $N = 2$ в спинорное расслоение ранга 2 над комплексной кривой (в смысле [8, 12]) и вещественную суперкривую (P, τ) с $N = 2$ в вещественное спинорное расслоение ранга 2 над вещественной кривой. Таким образом, описание компонент пространства модулей вещественных кривых дает описание компонент связности пространства модулей спинорных расслоений ранга 2 над вещественными кривыми.

§3. Параметризация компонент связности пространства модулей кривых (P, τ) , удовлетворяющих условию $\omega_1(P) = \omega_2(P)$

1. Пусть $C \in \text{Aut}(H)$ — гиперболический автоморфизм и $F = F_C \in \text{Aut}(H)$ таков, что $F^{-1}CF(z | \theta_1, \theta_2) = (\lambda z | h^1 \theta_1, h^2 \theta_{3-i})$ и $\lambda^\# > 1$. Положим $S_C^{\gamma\mu} = FS^{\gamma\mu}F^{-1}$, где $S^{00}(z | \theta_1, \theta_2) = (-\bar{z} | \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$, $S^{01}(z | \theta_1, \theta_2) = (-\bar{z} | \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_1)$, $S^{10}(z | \theta_1, \theta_2) = (-\bar{z} | -\bar{\theta}_1, -\bar{\theta}_2)$ и $S^{11}(z | \theta_1, \theta_2) = (-\bar{z} | -\bar{\theta}_2, -\bar{\theta}_1)$.

Положим $\tilde{S}_C^{\gamma\mu} = FI_C S^{\gamma\mu} F^{-1}$, где $I_C(z | \theta_1, \theta_2) = (\sqrt{\lambda} z | \theta_1, \theta_2)$. Проекция $\#$ переводит $S_C^{\gamma\mu}$ в $S_{C^\#}^\# = F^\# S^\# (F^\#)^{-1}$ и $\tilde{S}_C^{\gamma\mu}$ в $\tilde{S}_{C^\#}^\# = F^\# (I_C)^\# S^\# (F^\#)^{-1}$, где $S^\#(z) = -\bar{z}$.

Пусть $(H/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$ — вещественная суперкривая, $C \in \Gamma$ и $I = \{z \in H^\# : \text{Re } z = 0\}$. Естественная проекция $H^\# \rightarrow P^\# = H^\#/\Gamma^\#$ переводит $F(I)$ в отвечающий C контур $c \subset P^\#$. Ориентация $F_C^{-1}CF_C = I$ по возрастанию $\text{Im } z$ индуцирует ориентацию на c , которую мы назовем ориентацией, порожденной C . Если c — овал (псевдоовал), то существует ровно одна пара $\gamma, \mu \in \mathbb{Z}_2$, такая, что $S_C^{\gamma\mu} \subset \tilde{\Gamma}$ ($\tilde{S}_C^{\gamma\mu} \subset \tilde{\Gamma}$). Зададим на c еще одну ориентацию (мы назовем ее спинорной), которая совпадает с ориентацией, порожденной C , если $\gamma = 0$, и противоположна ей, если $\gamma = 1$.

ЛЕММА 3.1 [5]. Пусть сдвиги $C_1, C_2 \in \Gamma$ отвечают овалам или псевдооовам c_1, c_2 суперкривой $(P, \tau) = (H/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$ и сдвигу $C_1 \cdot C_2$ отвечает простой контур $c \subset P^\#$. Пусть $S_i = S_{C_i}^{\gamma_i \mu_i} \in \tilde{\Gamma}$, если c_i — овал, и $S_i = \tilde{S}_{C_i}^{\gamma_i \mu_i} \in \tilde{\Gamma}$, если c_i — псевдоовал. Тогда $\Omega_1(\Gamma)(S_1 S_2) = \gamma_1 + \gamma_2$.

2. Введем множество $T(g_0, n_\alpha, \eta)$ (где $\alpha, \eta \in \mathbb{Z}_2$, $n_1 \equiv 0 \pmod{2}$, $n = n_0 + n_1 > 0$ и $\eta = 0$ при $n_1 > 0$). Оно состоит из всех наборов $t = \{A_i, B_i (i = 1, \dots, g_0), C_j (j = 1, \dots, n)\} \subset (\text{Aut}(H))^{g+1}$, таких, что

1) $C_1(z | \theta_1, \theta_2) = (\lambda z | h^1 \theta_1, h^2 \theta_2)$, где $\lambda^\# > 1$;

2) $C_n(1 | 0, 0) = (1 | 0, 0)$, если $n > 1$, и $A_1(1 | 0, 0) = (1 | 0, 0)$, если $n = 1$, причем в первом случае $1 \in \mathbb{R}$ — притягивающая точка для $C_1^\#$, а во втором — для $A_1^\#$;

3) набор t порождает суперфуксову группу Γ с определяющим соотношением

$$\prod_{i=1}^{g_0} [A_i B_i] \prod_{j=1}^n C_j = 1,$$

состоящую из гиперболических сдвигов, сопряженных сдвигам $(z | \theta_1, \theta_2) \mapsto (\lambda z | h^1 \theta_1, h^2 \theta_2)$ (т. е. $\Omega_1(\Gamma) = \Omega_2(\Gamma)$);

4) на поверхности $P^\# = H^\#/\Gamma^\#$ (рода g_0 с n дырами) сдвигам C_i отвечают простые контуры, охватывающие ровно одну дыру, причем

$$\Omega(C_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leq n_0, \\ 1 & \text{при } i > n_0, \end{cases}$$

где $\Omega = \Omega_1(\Gamma) = \Omega_2(\Gamma)$;

5) $\Omega(A_i) = \Omega(B_i) = 0$ при $i > 1$ и $\Omega(A_1) = \Omega(B_1) = \eta$.

ЛЕММА 3.2. *Рассмотрим отображение $\Phi = \Phi(k_\alpha^\gamma, \mu)$ (где $\alpha, \gamma, \mu \in \mathbb{Z}_2$, $k_\alpha^0 + k_\alpha^1 = n_\alpha$), сопоставляющее набору $t = \{A_i, B_i (i = 1, \dots, g_0), C_j (j = 1, \dots, n)\} \in T(g_0, n_\alpha, \eta)$ кривую $(P, \tau) = (H/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$, где группа $\tilde{\Gamma}$ порождена набором t и инволюциями $S_{C_i}^{\gamma_i \mu}$, такими, что*

$$\gamma_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leq k_0^0 \text{ или } n_0 < i \leq n_0 + k_1^0, \\ 1 & \text{при } k_0^0 < i \leq n_0 \text{ или } i > n_0 + k_1^0. \end{cases}$$

Тогда $\Phi(T(g_0, n_\alpha, \eta)) = M(g, 1, 0, k_\alpha^\gamma, \eta, \mu)$, где $g = 2g_0 + n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение $\Phi(T(g_0, n_\alpha, \eta)) \subset M(g, 1, 0, k_\alpha^\gamma, \eta, \mu)$ следует из леммы 3.1. Пусть $(P, \tau) \in M(g, 1, 0, k_\alpha^\gamma, \eta, \mu)$. Занумеруем овалы $c_1, \dots, c_n$ кривой $(P^\#, \tau^\#)$ так, чтобы

$$\omega(c_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leq n_0, \\ 1 & \text{при } i > n_0 \end{cases}$$

и

$$\xi^\omega(c_1, c_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leq k_0^0 \text{ или } n_0 < i < n_0 + k_1^0, \\ 1 & \text{при } k_i^0 < i \leq n_0 \text{ или } i > n_0 + k_1^0, \end{cases}$$

где $\omega = \omega_1(P) = \omega_2(P)$. Наделим контур c_1 ориентацией, совпадающей со спинорной, если $\gamma_1 = 0$, и противоположной ей, если $\gamma_1 = 1$. Согласно [3], кривая $(P^\#, \tau^\#) = (H^\#/\Gamma^*, \tilde{\Gamma}^*/\Gamma^*)$, где $\tilde{\Gamma}^* \subset \widetilde{\text{Aut}}(H^\#)$, порождена множеством $t^* = \{A_i^*, B_i^* (i = 1, \dots, g_0), C_j^* (j = 1, \dots, n)\} \subset T(g_0, n_\alpha, \eta)$ и инволюциями $S_{C_i^*}^\#$, где сдвиги C_j^* отвечают овалам c_j и ориентация c_1 индуцирована C_1 .

Выберем $\tilde{\Gamma} \subset \widetilde{\text{Aut}}(H)$ так, чтобы $(P, \tau) = (H/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$ и $\tilde{\Gamma}^\# = \tilde{\Gamma}^*$. Положим $t = (\#)^{-1}(t^*) \subset \Gamma$. Заменяя t на сопряженный, можно считать, что $t = \{A_i, B_i (i = 1, \dots, g_0), C_j (j = 1, \dots, n)\}$ удовлетворяет условиям 1)–4) разд. 2 и $S_{C_1}^{\gamma_1 \mu} \subset \tilde{\Gamma}$. Согласно [13], $\{A_i^*, B_i^* (i = 1, \dots, g_0)\}$ можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись условия 5), т. е. $t \subset T(g_0, n_\alpha, \eta)$. Согласно лемме 3.1, $S_{C_i}^{\gamma_i \mu} \subset \tilde{\Gamma}$ при всех i и, следовательно, $\Phi(t) = (P, \tau)$.

ЛЕММА 3.3. *Рассмотрим отображение $\Phi = \Phi(k_\alpha, \delta, \mu)$ (где $\alpha, \delta, \mu \in \mathbb{Z}_2$, $k_0 = n_0$, $n_1 - 2 \leq k_1 < n_1$), сопоставляющее набору $t = \{A_i, B_i (i =$*

$1, \dots, g_0), C_j \ (j = 1, \dots, n)\} \in T(g_0, n_\alpha, 0)$ кривую $(P, \tau) = (H/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$, где группа $\tilde{\Gamma}$ порождена набором t и преобразованиями $S_{C_i}^{0\mu}$ ($i < k_0 + k_1$), $\tilde{S}_{C_i}^{0\mu}$ ($k_0 + k_1 < i < n$), $S_{C_n}^{\delta\mu}$. Тогда $\Phi(T(g_0, n_\alpha, 0)) = M(g, 0, 0, k_\alpha, \delta, \mu)$, где $g = 2g_0 + n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение $\Phi(T(g_0, n_\alpha, 0)) \subset M(g, 0, 0, k_\alpha, \delta, \mu)$ следует из леммы 3.1. Пусть $(P, \tau) \in M(g, 0, 0, k_\alpha, \delta, \mu)$. Занумеруем овалы $c_1, \dots, c_k$ ($k = k_0 + k_1$) кривой $(P^\#, \tau^\#)$ так, чтобы

$$\omega(c_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leq n_0, \\ 1 & \text{при } i > n_0, \end{cases}$$

где $\omega = \omega_1(P) = \omega_2(P)$. Согласно [3], их можно дополнить непересекающимися псевдооовалями c_i ($k < i \leq n$) так, чтобы множество $c_1, \dots, c_n$ разбивало $P^\#$ на две компоненты связности. Наделим контуры $c_1, \dots, c_{n-1}$ спинорной ориентацией. Разрежем P по контурам $c_1, \dots, c_{n-1}$. На полученной поверхности Q инволюция $\tau^\#$ действует без неподвижных точек. Следовательно, псевдоовал $c_n \subset Q$ можно выбрать так, чтобы ориентация компоненты связности P_1 поверхности $Q \setminus c_n$ индуцировала на $c_1, \dots, c_{n-1}$ спинорную ориентацию.

Согласно [3], $(P^\#, \tau^\#) = (H^\#/\Gamma^*, \tilde{\Gamma}^*/\Gamma^*)$, где $\Gamma^* \subset \widetilde{\text{Aut}}(H^\#)$ порождена множеством $t^* = \{A_i^*, B_i^* \ (i = 1, \dots, g_0), C_j^* \ (j = 1, \dots, n)\} \in T(g_0, n_\alpha, 0)$ и отображениями $S_{C_j}^\# \ (j \leq k)$, $\tilde{S}_{C_j}^\# \ (j > k)$, где сдвиги C_j^* отвечают контурам c_j и ориентация c_1 индуцирована C_1 .

Выберем $\tilde{\Gamma} \subset \widetilde{\text{Aut}}(H)$ так, чтобы $(P, \tau) = (H/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$ и $\tilde{\Gamma}^\# = \tilde{\Gamma}^*$. Положим $t = (\#)^{-1}(t^*) \subset \Gamma$. Заменяя t на сопряженный, можно считать, что $t = \{A_i, B_i \ (i = 1, \dots, g_0), C_j \ (j = 1, \dots, n)\}$ удовлетворяет условиям 1)–4) разд. 2 и $S_{C_1}^{0\mu}$ (или $\tilde{S}_{C_1}^{0\mu}$, если $k = 0$) принадлежит $\tilde{\Gamma}$. Согласно [13], $A_i^*, B_i^* \ (i = 1, \dots, g)$ можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись условия 5), т.е. $t \subset T(g_0, n_\alpha, \eta)$. В силу выбора ориентации на c_i имеют место включения $S_{C_i}^{0\mu} \in \tilde{\Gamma}$ при $i \leq k$ и $\tilde{S}_{C_i}^{0\mu} \in \tilde{\Gamma}$ при $k < i < n$. Согласно лемме 3.1, $\tilde{S}_{C_n}^{\delta\mu} \in \tilde{\Gamma}$ и, следовательно, $\Phi(t) = (P, \tau)$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пространство модулей $M(g, \varepsilon, 0)$ вещественных алгебраических суперкривых (P, τ) с $N = 2$ рода g , удовлетворяющих условию $\omega_1(P) = \omega_2(P)$, распадается на компоненты связности $M(g, 0, 0, k_\alpha, \delta, \mu)$, $M(g, 1, k_\alpha^\gamma, \eta, \mu)$, где $\alpha, \gamma, \delta, \mu \in \mathbb{Z}_2$, $0 \leq k_0 + k_1 \leq g$, $1 \leq \sum_{\alpha, \gamma} k_\alpha^\gamma \leq g + 1$, $\sum_{\alpha, \gamma} k_\alpha^\gamma \equiv g + 1 \pmod{2}$, $k_0 \equiv g + 1 \pmod{2}$, $k_0^0 + k_1^0 \equiv g + 1 \pmod{2}$ и $\eta = 0$ при $k_1^0 + k_1^1 > 0$. Среди них совпадают лишь компоненты $M(g, 1, 0, k_\alpha^\gamma, \eta, \mu)$ и $M(g, 1, 0, k_\alpha^{1-\gamma}, \eta, \mu)$. Каждая из компонент $M(\chi)$ имеет вид $\mathbb{R}^{(4g-3 \mid 4g-4)}/\text{Mod}(\chi)$, где $\text{Mod}(\chi)$ дискретно действует на $\mathbb{R}^{(4g-3 \mid 4g-4)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2.1 и леммам 3.2 и 3.3, множество $M(g, \varepsilon, 0)$ распадается на множества $M(\chi) = \Phi(T(g_0, n_\alpha, \varepsilon))$, где или $\chi = (g, 0, 0, k_\alpha, \delta, \mu)$ и $\Phi = \Phi(k_\alpha, \delta, \mu)$, или $\chi = (g, 1, k_\alpha^\gamma, \eta, \mu)$ и $\Phi = \Phi(k_\alpha^\gamma, \mu)$. Согласно [13], множество $T = T(g_0, n_\alpha, \varepsilon)$ естественным образом взаимно однозначно параметризуется множеством $\mathbb{R}^{(8g_0+4n-7 \mid 8g_0+4n-8)} = \mathbb{R}^{(4g-3 \mid 4g-4)}$. По построению T можно рассматривать как множество пар $(\tilde{\Gamma}, \tilde{t})$, где $\tilde{t}$ — указанный в леммах 3.2 и 3.3 базис группы $\tilde{\Gamma}$ и $(H/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma) \in \Phi(t)$; здесь

$\Gamma = \tilde{\Gamma} \cap \text{Aut}(H)$, $t = \tilde{t} \cap \Gamma$. Выберем одну из пар $(\tilde{\Gamma}_0, \tilde{t}_0) \in T$. Для любого $\varphi \in \text{Aut}(\tilde{\Gamma}_0)$ существует $F \in \text{Aut}(H)$ и $\tilde{t}_1 \in T$, такие, что $\varphi(\tilde{t}_0) = F\tilde{t}_1F^{-1}$. Условия нормировки 1), 2) определяют t_1 однозначно с точностью до сопряжения элементами группы $G \cong \mathbb{Z}_2^2$, порожденной инволюциями $(z | \theta_1, \theta_2) \mapsto (z | -\theta_1, -\theta_2)$ и $(z | \theta_1, \theta_2) \mapsto (z | \theta_2, \theta_1)$. Естественное соответствие между базами $\tilde{t}$ и $\tilde{t}_0$ порождает действие $\text{Aut}(\Gamma_0)/\text{Aut}(\Gamma_0) \cap \text{Aut}(H)$ на T/G . Таким образом, $\text{Aut}(\Gamma_0)/\text{Aut}(\Gamma_0) \cap \text{Aut}(H)$ действует на T/G и орбита этого действия совпадает с $M(\chi)$. Согласно [3], это действие дискретно.

§4. Параметризация компонент связности пространства модулей кривых (P, τ) , удовлетворяющих условию $\omega_1(P) \neq \omega_2(P)$

1. Пусть $\omega_1 \neq \omega_2$. Определенное в §2 двулистное накрытие $\varphi_{\#}: P^{\#} \rightarrow P^{\#}$ переводит овалы и псевдоовалы кривых $(P^{\#}, \tau_i^{\#})$ в овалы и псевдоовалы кривой $(P^{\#}, \tau^{\#})$. Обозначим через Q_i множество псевдоовалов кривой $(P^{\#}, \tau^{\#})$ вида $\varphi_{\#}(c)$, где c — псевдоовал кривой $(P^{\#}, \tau_i^{\#})$.

ЛЕММА 4.1 [6, 9]. *Овалы кривой $(P^{\#}, \tau^{\#})$ можно дополнить попарно непересекающимися псевдооовами $q_1, \dots, q_m \subset Q_1 \cup Q_2$ так, чтобы: (1) совокупность овалов и псевдоовалов $q_1, \dots, q_m$ разбивала $P^{\#}$ на две компоненты связности; (2) каждое из множеств Q_i содержало не более двух псевдоовалов; (3) если среди овалов есть такой овал c , что $\varphi_{\#}^{-1}(c)$ — связное множество, то все псевдоовалы принадлежат Q_1 ; (4) если для каждого овала c множество $\varphi_{\#}^{-1}(c)$ несвязно и $Q_i = \emptyset$, то $\varepsilon(P^{\#}, \tau_i) = 1$.*

2. Введем множество $T(g_0, n_{\alpha\beta}, \eta_i)$ (где $\alpha, \beta, i, \eta_i \in \mathbb{Z}_2$, $n = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2} n_{\alpha\beta} > 0$, $n_{10} + n_{11} \equiv n_{01} + n_{11} \equiv 0 \pmod{2}$, $\eta_1 = 0$ при $n_{10} + n_{11} > 0$, $\eta_2 = 0$ при $n_{01} + n_{11} > 0$), параметризующее компоненты связности множества суперкривых (P, τ) рода $g = 2g_0 + n - 1$, таких, что существует овал $c \subset P^{\tau}$ со свойством $\omega_1(c) \neq \omega_2(c)$.

Оно состоит из всех наборов $t = \{A_i, B_i (i = 1, \dots, g_0), C_j (j = 1, \dots, n)\} \subset (\text{Aut}(H))^{g+1}$, таких, что

- 1) $C_1(Z | \theta_1, \theta_2) = (\lambda z | h^1\theta_2, h^2\theta_1)$, где $\lambda^{\#} > 1$;
- 2) $C_n(1 | 0, 0) = (1 | 0, 0)$, если $n > 1$, и $A_1(1 | 0, 0) = (1 | 0, 0)$, если $n = 1$, причем $1 \in \mathbb{R}$ — притягивающая точка для $C_1^{\#}$ (соответственно для $A_1^{\#}$);
- 3) t порождает суперфуксову группу Γ с определяющим соотношением

$$\prod_{i=1}^{g_0} [A_i, B_i] \prod_{j=1}^n C_j = 1,$$

состоящую из гиперболических сдвигов;

4) на поверхности $P^{\#} = H^{\#}/\Gamma^{\#}$ рода g_0 с n дырами сдвигам C_i отвечают простые контуры c_i ($i \in I = \{1, \dots, n\}$), охватывающие ровно одну дыру; при этом множество $I_{\alpha\beta} = \{i \in I, \Omega_1(C_i) = \alpha, \Omega_2(C_i) = \beta\}$ (где $\Omega_i = \Omega_i(\Gamma)$) содержит $n_{\alpha\beta}$ элементов и задает разбиение множества I , удовлетворяющее условию $I_{01} < I_{10} < I_{00} < I_{11}$;

5) $\Omega_j(A_i) = \Omega_j(B_i) = 0$ при $i > 1$ и $\Omega_j(A_1) = \Omega_j(B_1) = \eta_j$.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\sum_{\gamma, \mu \in \mathbb{Z}_2} k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu} = n_{\alpha\beta}$. Разобьем множество $I_{\alpha\beta}$ на состоящие из $k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}$ элементов подмножества $I_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}$ ($\gamma, \mu \in \mathbb{Z}_2$) так, чтобы $I_{\alpha\beta}^{00} < I_{\alpha\beta}^{10} < I_{\alpha\beta}^{01} < I_{\alpha\beta}^{11}$. Рассмотрим отображение $\Phi = \Phi(k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu})$, сопоставляющее базису $t = \{A_i, B_i (i = 1, \dots, g_0), C_j (j = 1, \dots, n)\} \in T(g_0, n_{\alpha\beta}, \eta_i)$ кривую $(P, \tau) = (H/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$, где группа $\tilde{\Gamma}$ порождена t и инволюциями $S_{C_i}^{\gamma_i\mu_i}$, такими, что $\gamma_i = \gamma$, $\mu_i = \mu$, если $i \in I_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}$. Тогда $\Phi(T(g_0, n_{\alpha\beta}, \eta_i)) = M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}, \eta_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение $\Phi(T(g_0, n_{\alpha\beta}, \eta_i)) \subset M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}, \eta_i)$ следует из леммы 3.1. Пусть $(P, \tau) \in M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}, \eta_i)$. Занумеруем овалы $c_1, \dots, c_n$ так, чтобы $\omega_1(c_i) = \alpha$, $\omega_2(c_i) = \beta$, $\xi^{\omega_1}(c_1, c_i) = \gamma$ и $\xi^{\omega_2}(c_1, c_i) = \gamma + \mu + 1$ при $i \in I_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}$. Дальнейшее доказательство совпадает с доказательством леммы 3.2.

ЛЕММА 4.3. Пусть $n_{11} - 2 \leq k_{11}^0 + k_{11}^1 < n_{11}$ и $k_{\alpha\beta}^0 + k_{\alpha\beta}^1 = n_{\alpha\beta}$, если $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$. При $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$ разобьем множества $I_{\alpha\beta}$ на состоящие из $k_{\alpha\beta}^{\mu}$ элементов подмножества $I_{\alpha\beta}^{\mu}$ так, чтобы $I_{\alpha\beta}^0 < I_{\alpha\beta}^1$. Разобьем I_{11} на подмножества $I_{11}^0 < I_{11}^1 < I_{11}^*$ так, чтобы I_{11}^{μ} содержало k_{11}^{μ} элементов при $\mu \in \mathbb{Z}_2$. Рассмотрим отображение $\Phi = \Phi(k_{\alpha\beta}^{\mu}, \delta_i)$ ($i, \delta_i \in \mathbb{Z}_2$), сопоставляющее набору $t = \{A_i, B_i (i = 1, \dots, g_0), C_j (j = 1, \dots, n)\} \in I(g_0, n_{\alpha\beta}, \eta_i)$ кривую $(P, \tau) = (H/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$, где группа $\tilde{\Gamma}$ порождена набором t и инволюциями $S_{C_i}^{0\mu_i}$ (где $i \in I_{\alpha\beta}^{\mu} \neq I_{11}^*$, $\mu_i = \mu$), $\tilde{S}_{C_i}^{\sigma_i\mu_i}$ (где $i \in I_{11}^*$, $\sigma_i = 0$, $\mu_i = \mu_1$, если $i < n$, $\sigma_n = \delta_1$, $\sigma_n + \mu_n = \delta_2$). Тогда $\Phi(T(g_0, n_{\alpha\beta}, \eta_i)) = T(g, 0, 1, k_{\alpha\beta}^{\mu}, \delta_i, \rho_i)$, где $\rho_1 = \rho_2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение $\Phi(T(g_0, n_{\alpha\beta}, \eta_i)) \subset M(g, 0, 1, k_{\alpha\beta}^{\mu}, \delta_i, \rho_i)$ следует из леммы 3.1. Пусть $(P, \tau) \in M(g, 0, 1, k_{\alpha\beta}^{\mu}, \delta_i, \rho_i = 0)$. Занумеруем овалы $c_1, \dots, c_k$ ($k = \sum_{\alpha, \beta, \mu \in \mathbb{Z}_2} k_{\alpha\beta}^{\mu}$) кривой $(P^{\#}, \tau^{\#})$ так, чтобы $\omega_1(c_i) = \alpha$, $\omega_2(c_i) = \beta$, $\mu(c_i) = \mu$ при $i \in I_{\alpha\beta}^{\mu}$. Согласно лемме 4.1, их можно дополнить псевдооовами q_i ($1 \leq i \leq n - k \leq 2$), удовлетворяющими условиям леммы 4.1. При $n = k + 2$ положим $c_{n-1} = q_1$. Повторяя рассуждения леммы 3.3, находим псевдоовал c_n , такой, чтобы контуры $c_1, \dots, c_n$ разбивали $P^{\#}$ на две компоненты, одна из которых индуцирует спинорную ориентацию на $c_1, \dots, c_{n-1}$. Завершающая часть доказательства совпадает с соответствующей частью доказательства леммы 3.3.

3. Введем множество $T(g_0, n_{\alpha}, \eta_i)$ (где $\alpha, i, \eta_i \in \mathbb{Z}_2$, $n = n_0 + n_1 > 0$, $n_1 \equiv 0 \pmod{2}$, $\eta_1 = \eta_2 = 0$ при $n_1 > 0$), параметризующее компоненты связности множества суперкривых (P, τ) рода $g = 2g_0 + n - 1$, таких, что $\omega_1 \neq \omega_2$, но $\omega_1(c) = \omega_2(c)$ для любого овала $c \subset P^{\tau}$.

Оно состоит из всех наборов $t = \{A_i, B_i (i = 1, \dots, g_0), C_j (j = 1, \dots, n)\} \subset (\text{Aut}(H))^{g+1}$, таких, что

1) $C_n(Z | \theta_1, \theta_2) = (\lambda z | h^1 \theta_1, h^2 \theta_2)$, где $\lambda^{\#} > 1$;

2) $C_1(1 | 0, 0) = (1 | 0, 0)$, если $n > 1$, и $A_1(1 | 0, 0) = (1 | 0, 0)$, если $n = 1$, причем $1 \in \mathbb{R}$ — притягивающая точка для $C_1^{\#}$ (соответственно для $A_1^{\#}$);

3) t порождает суперфуксову группу Γ с определяющим соотношением

$$\prod_{i=1}^{g_0} [A_i B_i] \prod_{j=1}^n C_j = 1,$$

состоящую из гиперболических сдвигов;

4) на поверхности $P^\# = H^\#/\Gamma^\#$ рода g_0 с n дырами сдвигам C_i отвечают простые контуры c_i ($i \in I = \{1, \dots, n\}$), охватывающие ровно одну дыру, причем $\Omega_j(C_i) = \alpha$, если $i \in I_\alpha$, где $I_0 = \{i \in I : i \leq n_0\}$, $I_1 = \{i \in I : i > n_0\}$;

5) а) $\Omega_1(A_i) = \Omega_1(B_i) = 0$ при $i > 1$ и $\Omega_1(A_1) = \Omega_1(B_1) = \eta_1$,

б) $\Omega_2(A_i) = \Omega_2(B_i) = 0$ при $i > 2$ и $\Omega_2(A_2) = \Omega_2(B_2) = \eta_1 \cdot \eta_2$,

с) $\Omega_2(B_1) = 0$, $\Omega_2(A_1) = \eta_2$.

Повторяя доказательство леммы 4.2, получаем такой результат:

ЛЕММА 4.4. Пусть $\sum_{\gamma, \mu} k_{\alpha\alpha}^{\gamma\mu} = n_\alpha$. Разобьем множество I_α на составляющие из $k_{\alpha\alpha}^{\gamma\mu}$ элементов подмножества $I_\alpha^{\gamma\mu}$ ($\gamma, \mu \in \mathbb{Z}_2$) так, чтобы $I_\alpha^{00} < I_\alpha^{01} < I_\alpha^{10} < I_\alpha^{11}$. Рассмотрим отображение $\Phi = \Phi(k_{\alpha\alpha}^{\gamma\mu})$, сопоставляющее набору $t = \{A_i, B_i$ ($i = 1, \dots, g_0$), C_j ($j = 1, \dots, n\}) \in T(g_0, n_\alpha, \eta_i)$ кривую $(P, \tau) = (H/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$, где группа $\tilde{\Gamma}$ порождена набором t и инволюциями $S_{C_i}^{\gamma_i \mu_i}$, такими, что $\gamma_i = \gamma$, $\mu_i = \mu$, если $i \in I_\alpha^{\gamma\mu}$. Тогда $\Phi(T(g_0, n_\alpha, \eta_i)) = M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}, \eta_i)$, где $k_{01}^{\gamma\mu} = k_{10}^{\gamma\mu} = 0$.

Небольшая модификация доказательства леммы 4.3 дает следующую лемму:

ЛЕММА 4.5. Пусть $n_1 - 4 \leq k_{11}^0 + k_{11}^1 < n_1$ и $k_{00}^0 + k_{00}^1 = n_0$. Разобьем множество I_0 на состоящие из k_{00}^μ элементов подмножества I_0^μ ($\mu \in \mathbb{Z}_2$) так, чтобы $I_0^0 < I_0^1$. Разобьем I_1 на подмножества $I_1^0 < I_1^1 < J^0 < J^1$ так, чтобы I_1^μ содержало k_{11}^μ элементов при $\mu \in \mathbb{Z}_2$ и J^μ содержало $0 \leq m^\mu \leq 2$ элементов. Рассмотрим отображение $\Phi = \Phi(k_{\alpha\alpha}^\mu, \delta_1, \rho_i)$ ($i, \delta_1, \rho_i \in \mathbb{Z}_2$), сопоставляющее набору $t = \{A_i, B_i$ ($i = 1, \dots, g_0$), C_j ($j = 1, \dots, n\}) \in T(g_0, n_\alpha, \eta_i)$ кривую $(P, \tau) = (H/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$, где группа $\tilde{\Gamma}$ порождена набором t и инволюциями $S_{C_i}^{0\mu_i}$ (где $i \in I_\alpha^\mu$, $\mu_i = \mu$), $\tilde{S}_{C_i}^{\sigma_i \mu_i}$ (где $i \in J^\mu$, $\mu_i = \mu$; $\sigma_i = 0$, если $i < n$, $\sigma_n = \delta_1$). Тогда $\Phi(T(g_0, n_\alpha, 0)) = M(g, 0, 1, k_{\alpha\beta}^\mu, \delta_i, \rho_i)$, где $k_{01}^\mu = k_{10}^\mu = 0$, $\rho_i = 1$, если и только если $m^i = 0$, $\delta_2 \equiv m^0 + k_{11}^0 \pmod{2}$, если $J^1 \neq \emptyset$, и $\delta_2 \equiv k_{11}^1 \pmod{2}$, если $J^1 = \emptyset$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пространство модулей $M(g, \varepsilon, 1)$ вещественных алгебраических суперкривых (P, τ) с $N = 2$ рода g , удовлетворяющих условию $\omega_1(P) \neq \omega_2(P)$, распадается на компоненты связности вида $M(g, 0, 1, k_{\alpha\beta}^\mu, \delta_i, \rho_i)$, $M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}, \eta_i)$, где $\alpha, \beta, \gamma, \mu, i, \delta_i, \rho_i, \eta_i \in \mathbb{Z}_2$, $0 \leq \sum_{\alpha, \beta, \mu} k_{\alpha\beta}^\mu \leq g$, $1 \leq \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \mu} k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu} \leq g + 1$, $\sum_{\alpha, \beta, \gamma, \mu} k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu} \equiv g + 1 \pmod{2}$, $\sum_{\mu, \beta} k_{0\beta}^\mu \equiv \sum_{\mu, \alpha} k_{\alpha 0}^\mu \equiv \sum_{\gamma, \mu, \beta} k_{0\beta}^{\gamma\mu} \equiv \sum_{\gamma, \mu, \alpha} k_{\alpha 0}^{\gamma\mu} \equiv g + 1 \pmod{2}$, $\rho_1 + \rho_2 < 2$, $\rho_1 = \rho_2 = 0$ при $k_{01}^0 + k_{11}^0 + k_{10}^0 + k_{10}^1 > 0$, $\eta_1 = 0$ при $\sum_{\alpha, \gamma, \mu} k_{1\beta}^{\gamma\mu} > 0$ и $\eta_2 = 0$ при $\sum k_{\alpha 1}^{\gamma\mu} > 0$. Среди них совпадают лишь множества $M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}, \eta_i)$ и $M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{1-\gamma\mu}, \eta_i)$. Каждая компонента $M(\chi)$ имеет вид $\mathbb{R}^{(4g-4 \mid 4g-4)}/\text{Mod}(\chi)$, где $\text{Mod}(\chi)$ дискретно действует на $\mathbb{R}^{(4g-4 \mid 4g-4)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2.1 и леммам 4.2–4.5, множество $M(g, \varepsilon, 1)$ распадается на подмножества $M(\chi) = \Phi(T(g_0, n_{\alpha\beta}, \eta_i))$. Согласно

[13], множество $T = T(g_0, n_{\alpha\beta}, \eta_i)$ естественным образом взаимно однозначно параметризуется множеством $\mathbb{R}^{(8g_0+4n-7 \mid 8g_0+4n-8)} = \mathbb{R}^{(4g-3 \mid 4g-4)}$. По построению T можно рассматривать как пару $(\tilde{\Gamma}, \tilde{t})$, где $\tilde{t}$ — указанный в леммах 4.2–4.5 базис группы $\tilde{\Gamma}$ и $(H/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma) \in \Phi(t)$; здесь $\Gamma = \tilde{\Gamma} \cap \text{Aut}(H)$, $t = \tilde{t} \cap \Gamma$. Выберем одну из пар $(\tilde{\Gamma}_0, \tilde{t}_0) \in T$. Естественное соответствие между базисами $\tilde{t}$ и $\tilde{t}_0$ индуцирует действие группы $\text{Aut}(\tilde{\Gamma}_0)$, переводящее $(\tilde{\Gamma}, \tilde{t})$ в $(F\tilde{\Gamma}^{-1}F, F\tilde{t}^{-1}F^{-1})$ для некоторых $F \in \text{Aut}(H)$ и $(\tilde{\Gamma}^1, \tilde{t}^1) \in T$. Условия 1), 2) однозначно определяют $\tilde{t}^1$ с точностью до сопряжения элементом группы G , порожденной преобразованиями вида $(z \mid \theta_1, \theta_2) \mapsto (z \mid \mu\theta_i, \mu^{-1}\theta_{3-i})$, $(z \mid \theta_1, \theta_2) \mapsto (z \mid -\theta_1, -\theta_2)$, $(z \mid \theta_1, \theta_2) \mapsto (z \mid \theta_2, \theta_1)$. Согласно [13], $T/G \cong \mathbb{R}^{(4g-4 \mid 4g-4)}/\mathbb{Z}_2^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранов М. А., Шварц А. С. О многопетлевом вкладе в теории струны. Письма в ЖЭТФ, **42**, №8, 340–342 (1985).
2. Манин Ю. И. Супералгебраические кривые и квантовые струны. Труды МИАН СССР, **183**, 126–138 (1990).
3. Натанзон С. М. Модули вещественных алгебраических кривых. Труды Моск. матем. о-ва, **37**, 219–253 (1978).
4. Натанзон С. М. Пространство модулей римановых суперповерхностей. Матем. заметки, **45**, №4, 111–116 (1989).
5. Натанзон С. М. Клейновы суперповерхности. Матем. заметки, **48**, №2, 72–82 (1990).
6. Натанзон С. М. Клейновы поверхности. УМН, **45**, вып. 6, 47–90 (1990).
7. Натанзон С. М. Классификация пар функций Арфа на ориентируемых и неориентируемых поверхностях. Функци. анализ и его прил., **28**, вып. 3, 35–46 (1994).
8. Atiyah M. Riemann surfaces and spin structures. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **4**, No. 1, 47–62 (1971).
9. Bujalance E., Costa A. F., Natanzon S. M., Singerman D. Involutions of compact Klein surfaces. Math. Z., **211**, 461–478 (1992).
10. Friedan D. Notes on string theory and two dimensional conformal field theory. Proc. Workshop on Unified String Theories (Institute for Theoretical Physics, Santa Barbara) 1985.
11. Gepner D. Space-time supersymmetry in compactified string theory and superconformal models. Nuclear Phys B, **296**, 757–779 (1988).
12. Mumford D. Theta characteristics of an algebraic curve. Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. (4), **4**, No. 2, 181–192 (1971),
13. Natanzon S. M. Moduli spaces of Riemann $N = 1$ and $N = 2$ supersurfaces. J. Geom. Phys., **12**, 35–54 (1993).
14. Natanzon S. M. Moduli spaces of Riemann and Klein supersurfaces. Development of Modern Mathematics, Moscow School, eds. V. Arnold and M. Monastyrsky, Chapman and Hall, England, 1993, pp. 100–130