Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Новокшенов, Динамика уиземовской зоны
вещественного решения уравнения синус-Гордон с
конечнозонными граничными условиями, *Функц.
анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 4, 31–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa548>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:29:30

УДК 517.9

Динамика узеломовской зоны вещественного решения уравнения синус-Гордон с конечнозонными граничными условиями^{*}

© 1996. В. Ю. Новокшенов

Введение

Рассмотрим задачу Коши для уравнения синус-Гордон

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad (2)$$

где начальные данные $u_0, u_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ достаточно быстро выходят на конечно-зонные граничные функции

$$u_0(x) \rightarrow \begin{cases} v_n(\theta_1, \dots, \theta_n)|_{t=0}, & x \rightarrow -\infty, \\ v_m(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_m)|_{t=0}, & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (3)$$

$$u_1(x) \rightarrow \begin{cases} \partial_t v_n(\theta_1, \dots, \theta_n)|_{t=0}, & x \rightarrow -\infty, \\ \partial_t v_m(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_m)|_{t=0}, & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (4)$$

$$\theta_i = xU_i + tV_i + W_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\tilde{\theta}_j = x\tilde{U}_j + t\tilde{V}_j + \tilde{W}_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Здесь v_n, v_m суть 2π -периодические функции по соответствующим аргументам $\theta_i, \tilde{\theta}_j$, а «обмоточные» векторы $U = (U_1, \dots, U_n)$, $V = (V_1, \dots, V_n)$ выбираются по известным формулам метода конечнозонного интегрирования (см. ниже §1) и определяются в конечном счете расположением точек ветвления римановых поверхностей Γ_n, Γ_m конечнозонного спектра функций v_n, v_m .

Задача состоит в исследовании асимптотического поведения решения при больших временах. Она относится к классу «задач о ступеньке» для интегрируемых эволюционных уравнений [1, гл. 4]. Их теория достаточно хорошо разработана для так называемого случая устойчивых граничных условий (2), когда все точки ветвления вещественны. В этом случае для уравнения (1), также как и в аналогичных задачах с вещественными конечнозонными граничными условиями для уравнений КдФ и НШ (см. [1–7]), главный член асимптотики представляет собой модулированное конечнозонное решение

$$u = u_N(\theta_1, \dots, \theta_N|\xi) + o(1), \quad t \rightarrow \infty, \quad (5)$$

^{*} Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №93-01-165), а также Международного научного фонда (грант RK2300).

где $\theta_i = xU_i(\xi) + tV_i(\xi) + W_i(\xi)$, $N = N(\xi)$, $N \in \mathbb{Z}$, $\xi = x/t$ — «медленная» пространственная переменная. Обмоточные векторы U , V и функция u строятся по стандартным формулам типа формул Итса–Матвеева по «подвижной» (зависящей от ξ) римановой поверхности $\Gamma(\xi)$. В свою очередь, динамика по ξ римановой поверхности (ее точек ветвления) определяется уравнениями Уизема

$$(\xi - S_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{2N})) \frac{d\lambda_j}{d\xi} = 0, \quad j = 1, \dots, 2N, \quad (6)$$

где групповые скорости S_j явным образом могут быть выражены в терминах гиперэллиптических интегралов по a -циклам поверхности (см. ниже (1.11), (2.10)). Подобно случаям КдФ и НШ, здесь все функции S_i вещественны и удовлетворяют условиям монотонности [3–5, 7]

$$1^\circ. \partial S_j / \partial \lambda_j < 0, \quad j = 1, \dots, 2N.$$

$$2^\circ. S_j \neq S_i \text{ при } \lambda_j \neq \lambda_i.$$

Эти условия обеспечивают существование и единственность кусочно-непрерывного решения системы (6) с граничными условиями [3]

$$\Gamma(\xi) \rightarrow \begin{cases} \Gamma_n, & \xi \rightarrow -\infty, \\ \Gamma_m, & \xi \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (7)$$

В действительности граничные значения функций $\lambda_i = \lambda_i(\xi)$ достигаются при конечных значениях ξ . Таким образом, в случае вещественных гиперэллиптических поверхностей Γ_n , Γ_m , задающих граничные условия (3), (4), главный член (5) асимптотики решения задачи Коши (1), (2) при больших временах полностью определяется динамикой поверхности $\Gamma(\xi)$ — решением системы (6) с граничными условиями (7). Указанная ситуация имеет место и в более общих задачах о пространственно-временных модуляциях волновых пакетов в солитонных уравнениях [14–21]. Так, если $u = u_k(\theta_1, \dots, \theta_k)$ есть k -зонное решение уравнения (1), то возмущенное по медленным переменным решение должно иметь вид

$$u = u_k(\theta_1(X, T), \dots, \theta_k(X, T)) + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad |x|, |t| < \text{const} \cdot \varepsilon,$$

где фазы $\theta_i = xU_i(X, T) + tV_i(X, T) + W_i(X, T)$ определяются по римановой поверхности $\Gamma = \Gamma(X, T)$, удовлетворяющей гиперболической системе Уизема

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial T} - S_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{2N}) \frac{\partial \lambda_j}{\partial X} = 0, \quad j = 1, \dots, 2N, \quad (8)$$

где S_j совпадают с групповыми скоростями, фигурирующими в системе (6) (см. [2]). Нетрудно видеть, что (6) представляет собой автомодельную редукцию системы (8). В ряде случаев при специальных граничных условиях (7) (типа центрированных волн разрежения) можно доказать, что асимптотически при $T \rightarrow \infty$ решение (8) при условиях монотонности на S_j сходится к решению системы (6) (см. [3–7]).

Все сказанное выше относится к вещественным поверхностям Γ , определенным выбором вещественных точек ветвления λ_j . Модулированное конечнозонное решение (5) в этом случае по терминологии [2] представляет собой «kink-train» — устойчивое по малым возмущениям асимптотическое решение. Этот факт обусловлен в конечном счете вещественностью и строгой разделенностью групповых

скоростей в уравнениях (6), (8). Качественно новая ситуация возникает при замене вещественных поверхностей Γ_n , Γ_m для граничных условий (3), (4) на самосопряженные поверхности. При подходящем выборе базиса циклов и абелевых дифференциалов гарантируется вещественность граничных функций (см. [2, 10]) и тем самым вещественность решения задачи (1), (2). Однако попытка использовать модулированный конечнозонный анзатц (5) для главного члена асимптотики при больших временах приводит к системе Узима (6) с комплексными групповыми скоростями. Вещественная редукция обеспечивает вещественность анзатца (5), однако этот анзатц («breather-train» по терминологии [2]) будет неустойчив относительно малых возмущений. Тем не менее мы будем предполагать в качестве гипотезы (пока не доказанной), что асимптотика решений задачи (1), (2) при $t \rightarrow \infty$ имеет структуру модулированного конечнозонного решения (5), параметры которого следует определить из системы (6) с граничными условиями (7).

В пользу этой гипотезы свидетельствуют накопленные в последнее время факты о поведении неустойчивых решений солитонных уравнений [8, 16–23]. Дело в том, что линейная теория возмущений не дает правильных результатов в неустойчивом случае, поскольку в точно интегрируемых системах большое возмущение не разрушает решений, а лишь переводит их в новое «метастабильное состояние». Классической иллюстрацией здесь служит математический маятник $\ddot{u} = \sin u$ в окрестности неустойчивого положения равновесия $u = 0$. В интегрируемой системе (1) существует большой запас условно-периодических решений, служащих, как отмечено в [8], аттракторами для (условно-периодических) возмущений таких решений. Механизм их эволюции по медленным переменным является, по-видимому, универсальным как в устойчивом, так и в неустойчивом случае и описывается системой Узима (5) (см. [16–19, 23]).

Ясно, что в неустойчивом случае вопрос о разрешимости системы Узима становится нетривиальным ввиду появления равенств вида

$$\xi = S_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{2N}), \quad j = 1, \dots, 2N, \quad (9)$$

где ξ вещественно, а S_j комплексны. В этом случае мнимые и вещественные части системы (9) определяют «кинематику» и «динамику» точек ветвления, а именно уравнения $\operatorname{Im} S_j = 0$ определяют траектории λ_k в комплексной плоскости, в то время как уравнения $\operatorname{Re} S_j = \xi$ задают закон движения точек по этим траекториям. Ввиду сильной нелинейности функций S_j траектории точек ветвления могут выглядеть весьма нетривиально, а доказательство оценок вида 1° , 2° значительно сложнее, чем в вещественном случае. Основным результатом работы является доказательство разрешимости системы Узима (8) при $N = 2$ для произвольных несовпадающих однозонных граничных условий (7) с комплексно-сопряженными точками ветвления.

§1. Конструкция уравнений Узима

Приведем здесь кратко основные формулы для конечнозонных решений уравнения синус-Гордон (1) и дадим эвристический вывод уравнений Узима (6).

Вещественное N -зонное решение уравнения (1) строится по заданной гиперэллиптической поверхности Γ вида $\zeta^2 = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_{2N})$, подчиненной антиголоморфной инволюции $\tau: (\lambda, \zeta) \mapsto (\bar{\lambda}, -\bar{\zeta})$. Ограничимся рассмотрением поверхностей с условиями $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{j+N} = \bar{\lambda}_j$, $j = 1, \dots, N$. Определим базис циклов, как показано на рис. 1.

Рис. 1. Базис циклов на поверхности Γ .
Пунктиром обозначен путь на нижнем листе.

Выберем базис ω_j , $j = 1, \dots, N$, голоморфных абелевых дифференциалов на Γ с нормировкой

$$\int_{a_k} \omega_j = \delta_{ij}, \quad k, j = 1, \dots, N.$$

Определим пару абелевых дифференциалов второго рода $\Omega_{\pm 1}$, так что Ω_{+1} аналитичен на Γ всюду, кроме $\lambda = \infty$, а дифференциал Ω_{-1} аналитичен всюду, кроме $\lambda = 0$, причем в окрестности этих точек справедливо представление $\Omega_{\pm 1} = \xi^{-2} d\xi + O(1)$, где ξ — локальный параметр. Дифференциалы однозначно фиксируются нормировкой

$$\int_{a_k} \Omega_{\pm 1} = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.1)$$

Указанный выбор абелевых дифференциалов обеспечивает существование вещественного неособого решения уравнения (1), задаваемого формулой [9]

$$u_N(x, t) = 2i \log \frac{\theta(xU + tV + 1/2 + D)}{\theta(xU + tV + D)}, \quad (1.2)$$

где θ — тета-функция Римана на Γ с матрицей периодов $B_{ij} = \int_{b_j} \omega_i$, D — чисто мнимый постоянный вектор, а компоненты обмоточных векторов $U = -4i(U_1, \dots, U_N)$, $V = -4i(V_1, \dots, V_N)$ совпадают с интегралами по b -циклам от дифференциалов Ω_+ и Ω_- соответственно, $\Omega_{\pm} = \Omega_{+1} \pm \Omega_{-1}/16$.

Вектор-функция $\Psi(P, x, t) = (\Psi_-, \Psi_+)^T$, $P = (\lambda, \zeta)$, удовлетворяющая уравнениям L - A -пары для уравнения синус-Гордон (1), является в случае $u =$

u_N аналитической на поверхности Γ и имеет вид [11]

$$\Psi_{\pm} = \frac{\theta(\mathcal{A}(P) + xU + tV + D + (1 \pm 1)/4)\theta(D)}{\theta(\mathcal{A}(P) + D)\theta(xU + tV + D + (1 \pm 1)/4)} \exp \left[-4i \int_{\infty}^P (x\Omega_{-} + t\Omega_{+}) \right], \quad (1.3)$$

где $\mathcal{A}(P) = (\int_{\infty}^P \omega_1, \dots, \int_{\infty}^P \omega_N)$ — отображение Абеля.

Опираясь на приведенные выше формулы для точного N -зонного решения уравнения (1), установим динамику параметров, задающих «модуляцию» этого решения по медленной переменной $\xi = x/t$. Будем предполагать [7], что модулированное N -зонное решение

$$\tilde{u} = u_N(x, t|\xi) + o(1), \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.4)$$

определено формулой (1.2), где все величины заданы на «подвижной» римановой поверхности $\Gamma = \Gamma(\xi)$, т.е. поверхности, имеющей точки ветвления $\lambda_j = \lambda_j(\xi)$. Тогда решение (1.4) удовлетворяет уравнению (1) с точностью $o(1)$ на интервале длины $O(t)$ только в том случае, когда в соответствующих уравнениях L - A -пары для модулированной функции $\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}(P, x, t|\xi)$ вида (1.3) нет секулярных (порядка $O(t^{-1})$) членов.

Для зануления секулярных членов достаточно потребовать, очевидно, чтобы $\tilde{\Psi}_{\xi} = 0$, а это, в свою очередь, в силу (1.3) влечет за собой

$$\int_{\infty}^P \left(\xi \frac{\partial \Omega_{-}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega_{+}}{\partial \xi} \right) = 0, \quad P \in \Gamma. \quad (1.5)$$

Поскольку в окрестности точек ветвления дифференциалы имеют вид

$$\Omega_{\pm} = \text{const} \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda - \lambda_j(\xi)}} + O(\sqrt{\lambda - \lambda_j(\xi)}),$$

равенство (1.5) при $\lambda \rightarrow \lambda_j$ эквивалентно $(\xi - S_j)\lambda'_j(\xi) = 0$, где

$$S_j = S(\lambda_j|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = (-\Omega_{+}/\Omega_{-})|_{\lambda=\lambda_j}, \quad S_{j+N} = \bar{S}_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Полученные уравнения доставляют необходимые условия существования N -зонного решения, модулированного параметром $\xi = x/t$. Если учитывать в них вещественную редукцию $\lambda_{j+N} = \bar{\lambda}_j$ поверхности Γ , то система Уизема приходит к виду

$$(\xi - S(\lambda_k|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N))\lambda'_k = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.6)$$

§2. Свойства групповых скоростей

Ключевую роль в исследовании свойств коэффициентов S_j уравнения Уизема (1.6) играет их аналитическое представление в терминах гиперэллиптических интегралов по a -циклам поверхности Γ .

Положим $R(\mu) = \sqrt{\mu(\mu - \lambda_1)(\mu - \bar{\lambda}_1) \cdots (\mu - \lambda_N)(\mu - \bar{\lambda}_N)}$ и составим определитель из гиперэллиптических интегралов

$$|p_1(\mu), \dots, p_N(\mu)| \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \int_{a_j} \frac{p_i(\mu)}{R(\mu)} d\mu \right\}_{i,j=1,\dots,N}, \quad (2.1)$$

где $p_1, \dots, p_N$ — рациональные по μ функции. Условимся также, что в обозначениях (1.6) для $S_j = S(\lambda_j | \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ зависимость от $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ будет опущена, если это не приводит к недоразумениям.

ТЕОРЕМА 2.1 [2]. *Отношение абелевых дифференциалов $S(\lambda) = -\frac{\Omega_+(\lambda)}{\Omega_-(\lambda)}$ представимо в виде*

$$S(\lambda) = \frac{|\lambda - \mu, (\lambda - \mu)\mu, \dots, (\lambda - \mu)(c\mu^{-1} + \lambda\mu^{N-1})|}{|\lambda - \mu, (\lambda - \mu)\mu, \dots, (\lambda - \mu)(c\mu^{-1} - \lambda\mu^{N-1})|}, \quad (2.2)$$

где $c = |\lambda_1 \cdots \lambda_N|/16$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению дифференциалы имеют вид

$$\begin{aligned} \Omega_{+1} &= \frac{(\lambda - A_1) \cdots (\lambda - A_N)}{R(\lambda)} d\lambda, \\ \Omega_{-1} &= \frac{|\lambda_1 \cdots \lambda_N|(\lambda B_1 - 1) \cdots (\lambda B_N - 1)}{\lambda R(\lambda)} d\lambda, \end{aligned}$$

причем постоянные A_j, B_j фиксируются условиями нормировки по a -циклам (1.1). Разрешая получающуюся таким образом систему линейных уравнений, приходим к представлению (2.2) для дифференциалов $\Omega_{\pm} = \Omega_{+1} \pm \Omega_{-1}/16$. Подробности вычислений приведены в [2, р. 27–30].

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть λ — одна из точек ветвления; тогда равенство $\text{Im } S(\lambda) = 0$ эквивалентно равенству $|\Lambda\mu^{-1}, \Lambda, \dots, \Lambda\mu^{N-2}| = 0$, где $\Lambda = (\lambda - \mu)(\bar{\lambda} - \mu)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определители, фигурирующие в формуле (2.2), можно представить в виде

$$\Omega_{\pm} = (-1)^N \bar{\lambda}^{-1} |\lambda - \mu, \Lambda, \Lambda\mu, \dots, \Lambda\mu^{N-3}, \Lambda(c\mu^{-1} \pm |\lambda|^2 \mu^{N-2})|;$$

тогда в силу вещественности интегралов по a -циклам от $\Lambda\mu^j$ мнимая часть отношения S принимает вид

$$\begin{aligned} 2 \text{Im } S(\lambda) &= \frac{|\lambda - \mu, \mathcal{M}, \Lambda(c\mu^{-1} - |\lambda|^2 \mu^{N-2})|}{|\Omega_-(\lambda)|^2} |\bar{\lambda} - \mu, \mathcal{M}, \Lambda(\bar{c}\mu^{-1} + |\lambda|^2 \mu^{N-2})| \\ &\quad - \frac{|\bar{\lambda} - \mu, \mathcal{M}, \Lambda(c\mu^{-1} - |\lambda|^2 \mu^{N-2})|}{|\Omega_-(\lambda)|^2} |\lambda - \mu, \mathcal{M}, \Lambda(c\mu^{-1} + |\lambda|^2 \mu^{N-2})| \\ &= \frac{|\lambda - \mu, \mathcal{M}, \bar{\lambda} - \mu|}{|\Omega_-(\lambda)|^2} |\Lambda(c\mu^{-1} - |\lambda|^2 \mu^{N-2}), \mathcal{M}, \Lambda(c\mu^{-1} + |\lambda|^2 \mu^{N-2})| \\ &= \frac{\Delta_1 \Delta_2}{|\Omega_-(\lambda)|^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь прямоугольная $(N - 2) \times N$ -матрица $\mathcal{M}$ составлена из столбцов $\Lambda, \Lambda\mu, \dots, \Lambda\mu^{N-3}$. Второе равенство в (2.3) есть следствие известного равенства из теории определителей

$$|a, \mathcal{M}, b| \cdot |c, \mathcal{M}, d| = |c, \mathcal{M}, b| \cdot |a, \mathcal{M}, d| = |a, \mathcal{M}, d| \cdot |b, \mathcal{M}, c|, \quad (2.4)$$

где a, b, c и d — произвольные столбцы, а $\mathcal{M}$ — произвольная $(N - 2) \times N$ -матрица.

Пользуясь далее элементарными свойствами определителей, множители в (2.3) легко преобразовать к виду

$$\Delta_1 = |\lambda - \mu, \mathcal{M}, \bar{\lambda} - \mu| = (\bar{\lambda} - \lambda) |1, \mu, \mu^2, \dots, \mu^{N-1}|, \quad (2.5)$$

$$\Delta_2 = |\Lambda c \mu^{-1}, \mathcal{M}, |\lambda|^2 \mu^{N-2} \Lambda| = c |\lambda|^2 |\Lambda \mu^{-1}, \Lambda, \dots, \Lambda \mu^{N-2}|. \quad (2.6)$$

Согласно предложению 1 (см. приложение), $\Delta_1 \neq 0$; следовательно, при $\lambda \neq 0$ из $\text{Im } S(\lambda) = 0$ вытекает $\Delta_2 = 0$. Обратное утверждение следует из того, что в точках ветвления дифференциал Ω_- не равен нулю [11]. Теорема доказана.

ЛЕММА 2.1. Пусть λ и λ^* — две различные точки; тогда имеет место представление

$$S(\lambda) - S(\lambda^*) = c \lambda \lambda^* \frac{(\lambda - \lambda^*) |1, \mu, \dots, \mu^{N-1}|}{\Omega_-(\lambda) \Omega_-(\lambda^*)} |\Lambda \mu^{-1}, \Lambda, \dots, \Lambda \mu^{N-2}|, \quad (2.7)$$

где $\Lambda = (\lambda - \mu)(\lambda^* - \mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем определители в формуле (2.2) в виде

$$\Omega_{\pm} = (-1)^N (\lambda^*)^{-1} |\lambda - \mu, \Lambda, \Lambda \mu, \dots, \Lambda \mu^{N-3}, \Lambda(c \mu^{-1} \pm \lambda^* \lambda \mu^{N-2})|,$$

где $\Lambda = (\lambda - \mu)(\lambda^* - \mu)$. Тогда для разности справедливо разложение в произведение

$$\begin{aligned} S(\lambda) - S(\lambda^*) &= \frac{|\lambda - \mu, \mathcal{M}, \Lambda(c \mu^{-1} + \lambda^* \lambda \mu^{N-2})|}{\Omega_-(\lambda) \Omega_-(\lambda^*)} |\lambda^* - \mu, \mathcal{M}, \Lambda(c \mu^{-1} - \lambda^* \lambda \mu^{N-2})| \\ &\quad - \frac{|\lambda^* - \mu, \mathcal{M}, \Lambda(c \mu^{-1} + \lambda^* \lambda \mu^{N-2})|}{\Omega_-(\lambda) \Omega_-(\lambda^*)} |\lambda - \mu, \mathcal{M}, \Lambda(c \mu^{-1} - \lambda^* \lambda \mu^{N-2})| \\ &= \frac{|\lambda - \mu, \mathcal{M}, \lambda^* - \mu|}{\Omega_-(\lambda) \Omega_-(\lambda^*)} |\Lambda(c \mu^{-1} - \lambda^* \lambda \mu^{N-2}), \mathcal{M}, \Lambda(c \mu^{-1} + \lambda^* \lambda \mu^{N-2})| \\ &= \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Omega_-(\lambda) \Omega_-(\lambda^*)}. \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{M} = (\Lambda, \Lambda \mu, \dots, \Lambda \mu^{N-3})$ и во втором равенстве использовано соотношение (2.4). Применяя далее элементарные преобразования определителей вида (2.5), (2.6), получаем представление (2.7). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть λ_j, λ_k — две различные точки ветвления, такие, что либо $\text{Im } S(\lambda_j) = 0$, либо $\text{Im } S(\lambda_k) = 0$. Тогда $S(\lambda_j) \neq S(\lambda_k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Составим разность $S(\lambda_j) - S(\lambda_k)$, которая по лемме 2.1 имеет представление (2.7). Поскольку по предложению 1 (см. приложение) нули

имеет лишь второй определитель в (2.7), а $\Omega_-(\lambda_j)\Omega_-(\lambda_k) \neq 0$, $\lambda_j \neq \lambda_k$, то равенство $S(\lambda_j) = S(\lambda_k)$ имеет место лишь при $|\Lambda\mu^{-1}, \Lambda, \dots, \Lambda\mu^{N-2}| = 0$. Однако последнее невозможно, если $\text{Im } S(\lambda_j) = 0$ или $\text{Im } S(\lambda_k) = 0$, по предложению 2 из приложения. Полученное противоречие доказывает теорему.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\text{Im } S(\lambda_j) = 0$ в точке ветвления. Тогда $\partial S(\lambda_j)/\partial \lambda_j \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка λ лежит достаточно близко к λ_j , так что $\Omega_-(\lambda) \neq 0$. Тогда формула (2.7) переписывается в виде

$$\frac{S(\lambda_j) - S(\lambda)}{\lambda_j - \lambda} = \frac{c\lambda_j|1, \mu, \dots, \mu^{N-1}|}{\Omega_-(\lambda_j)\Omega_-(\lambda)} |\Lambda\mu^{-1}, \Lambda, \dots, \Lambda\mu^{N-2}|,$$

где $\Lambda = (\lambda - \mu)(\lambda_j - \mu)$. Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow \lambda_j$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S}{\partial \lambda}(\lambda|\lambda_1, \dots, \lambda_N) \Big|_{\lambda=\lambda_j} \\ &= \frac{c\lambda_j^2|1, \mu, \dots, \mu^{N-1}|}{\Omega_-^2(\lambda_j)} |(\lambda_j - \mu)^2\mu^{-1}, (\lambda_j - \mu)^2, \dots, (\lambda_j - \mu)^2\mu^{N-2}|. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Согласно предложению 1 и следствию предложения 2, правая часть здесь отлична от нуля.

Оценим теперь полную производную $\partial S(\lambda_j|\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_N)/\partial \lambda_j$. Как видно из формулы (2.2), величины λ входят в S_j только посредством гиперэллиптических интегралов от $\mu^k(\mu - \lambda)R^{-1}(\mu)d\mu$; поэтому

$$\frac{\partial S(\lambda_j|\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_N)}{\partial \lambda_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial S(\lambda|\lambda_1, \dots, \lambda_N)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_j}.$$

Последняя производная отлична от нуля в силу (2.8). Следствие доказано.

§3. Динамика узимовских зон

Вернемся теперь к анализу решений системы Узима (1.6). Условимся называть решением системы (1.6) набор кусочно-гладких функций $\{\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_N(\xi)\}$, гладких на конечном множестве интервалов $(-\infty, \xi_1)$, (ξ_1, ξ_2) , $\dots$, (ξ_{l-1}, ξ_l) , (ξ_l, ∞) и непрерывных в граничных точках¹. Граничные точки ξ_i будут определяться как «моменты схлопывания» или «рождения» точек ветвления, т.е. $\text{Im } \lambda_j(\xi) = 0$ или $\lambda_j(\xi_i) = \lambda_k(\xi_i)$. На каждом интервале будем называть точку λ_j подвижной, если $\lambda'_j(\xi) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 3.1. В каждый «момент времени» ξ среди решений системы (3.1) подвижной является не более чем одна точка λ_j , причем $\lambda'_j < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, напротив, при некотором ξ подвижны точки λ_k и λ_j . Тогда k -е и j -е уравнения системы (1.6) превращаются в равенства $\xi = S(\lambda_k)$, $\xi = S(\lambda_j)$, $\text{Im } S(\lambda_j) = \text{Im } S(\lambda_k) = 0$. Однако в силу последних равенств по теореме 2.3 имеем $S(\lambda_k) \neq S(\lambda_j)$. По следствию теоремы 2.3 $\lambda'_j(\xi) = (\partial S/\partial \lambda_j)^{-1} < \infty$. Полученное противоречие доказывает теорему.

¹По поводу гладкости решения $u(x, t)$ в граничных точках см. замечание 1 в конце §3.

Таким образом, на каждом интервале $\xi_i < \xi < \xi_{i+1}$ подвижная точка $\lambda_j = \lambda_j(\xi)$ определяется как решение системы функциональных уравнений

$$\operatorname{Im} S(\lambda_j(\xi)|\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j(\xi), \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_N) = 0, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{Re} S(\lambda_j(\xi)|\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j(\xi), \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_N) = \xi, \quad (3.2)$$

где точки $\lambda_k \neq \lambda_j$ фиксированы. Уравнение (3.1) задает кривую в комплексной плоскости λ , в то время как уравнение (3.2) задает динамику движения точки λ_j вдоль этой кривой. Рассмотрим сначала свойства решений уравнения (3.1). Будем опускать для краткости индекс j , считая $\lambda = \lambda(\xi)$ одной из точек ветвления.

ЛЕММА 3.1. *Кривая $\lambda = \lambda(\xi)$, множество решений уравнения (3.1), проходит через остальные точки ветвления $\lambda_1, \dots, \lambda_N$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы означает, что $\operatorname{Im} S(\lambda_i|\lambda_1, \dots, \lambda_N) = 0$. По теореме 2.2 достаточно доказать, что

$$|(\lambda_i - \mu)(\bar{\lambda}_i - \mu)\mu^{-1}, \dots, (\lambda_i - \mu)(\bar{\lambda}_i - \mu)\mu^{N-2}| = 0.$$

По построению j -я строка последнего определителя составлена из абелевых интегралов по циклу a_j . При $\lambda_i = \lambda_j$ циклы a_i и a_j совпадают, и определитель обращается в нуль. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. *Кривая $\lambda = \lambda(\xi)$, проходящая через точку ветвления λ_i , пересекает вещественную ось.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, напротив, множество решений уравнения (3.1), содержащее точку λ_i , лежит строго в верхней полуплоскости. Функция $S(\lambda|\lambda_1, \dots, \lambda, \dots, \lambda_N)$ на этой кривой вещественна и имеет, следовательно, максимум и минимум в некоторых точках $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$. Поскольку функция S конечна в точке ветвления и $S(\infty) = 1$, то хотя бы одна из этих точек не совпадает с бесконечностью. Тогда в этой точке $\partial S / \partial \lambda = 0$, что противоречит следствию теоремы 2.3. Лемма доказана.

Обращаясь к уравнению (3.2), заметим что производная $\lambda'(\xi) = 1/S_\lambda$ не равна нулю и конечна по следствию теоремы 2.3. Отсюда вытекает следующее утверждение:

ЛЕММА 3.3. *Движение точки $\lambda = \lambda(\xi)$ вдоль кривой $\operatorname{Im} S(\lambda) = 0$ происходит монотонно и с конечной скоростью.*

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть $\lambda = \lambda(\xi)$ — решение уравнений (3.1), (3.2) в некотором интервале $\xi_{\text{нач}} < \xi < \xi_{\text{кон}}$. Тогда это решение единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, напротив, существуют два решения $\lambda = \lambda(\xi)$ и $\lambda^* = \lambda^*(\xi)$, такие, что $\operatorname{Im} S(\lambda(\xi)) = 0$ и $\operatorname{Im} S(\lambda^*(\xi)) = 0$ в силу уравнения (3.1). Тогда из уравнения (3.2) имеем $\xi = \operatorname{Re} S(\lambda(\xi)) = \operatorname{Re} S(\lambda^*(\xi))$, что противоречит теореме 2.3. Теорема доказана.

ЛЕММА 3.4. *Пусть $N = 2$, $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, $\operatorname{Im} S(\lambda_1) = 0$ и точка λ_2 неподвижна. Тогда траектория подвижной точки $\lambda_1 = \lambda(\xi)$ лежит на окружности $|\lambda_1| = |\lambda_2|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.2 уравнение (3.1) при $N = 2$ принимает вид

$$|(\lambda_1 - \mu)(\bar{\lambda}_1 - \mu)\mu^{-1}, (\lambda_1 - \mu)(\bar{\lambda}_1 - \mu)| = 0. \quad (3.3)$$

Предложение 3 (см. приложение) утверждает, что все точки окружности $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ удовлетворяют уравнению (3.3). Других решений системы (3.1), (3.2) нет в силу теоремы единственности (теорема 3.2). Лемма доказана.

Докажем теперь существование и единственность уиземовской перестройки в случае однозонных граничных условий Γ_j : $\zeta^2 = \lambda(\lambda - \lambda_j)(\lambda - \bar{\lambda}_j)$, $j = 1, 2$. Будем искать эту перестройку в виде

$$\tilde{\Gamma}(\xi) = \begin{cases} \Gamma_1, & \xi < \xi_{\text{нач}}, \\ \tilde{\Gamma}(\xi, 1), & \xi_{\text{нач}} < \xi < \xi_1, \\ \Gamma_{12}, & \xi_1 < \xi < \xi_2, \\ \tilde{\Gamma}(\xi, 2), & \xi_2 < \xi < \xi_{\text{кон}}, \\ \Gamma_2, & \xi > \xi_{\text{кон}}, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $\tilde{\Gamma}(\xi, j)$ — двухзонные поверхности,

$$\tilde{\Gamma}(\xi, j): \zeta^2 = \lambda(\lambda - \lambda(\xi))(\lambda - \bar{\lambda}(\xi))(\lambda - \lambda_j)(\lambda - \bar{\lambda}_j), \quad j = 1, 2, \quad \xi_{\text{нач}} < \xi < \xi_{\text{кон}}, \quad (3.5)$$

так что $\tilde{\Gamma}(\xi_{\text{нач}}, 1) = \Gamma_1$, $\tilde{\Gamma}(\xi_{\text{кон}}, 2) = \Gamma_2$, $\tilde{\Gamma}(\xi_1, 1) = \Gamma_{12} = \tilde{\Gamma}(\xi_2, 2)$ и кусочно-гладкая функция $\lambda(\xi)$ удовлетворяет уравнению Уизема (1.6).

Величина $S(\lambda(\xi)|\lambda_j)$ обозначает так же, как и выше, групповую скорость в уравнении (1.6), вычисленную по формуле (2.2).

Предположим, что выполнено условие

$$\lim_{\lambda(\xi) \rightarrow \lambda_1} \operatorname{Re} S(\lambda(\xi)|\lambda_1, \lambda(\xi)) < \lim_{\lambda(\xi) \rightarrow \lambda_2} \operatorname{Re} S(\lambda(\xi)|\lambda_2, \lambda(\xi)). \quad (3.6)$$

Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3.3. *Для любых граничных условий рода 1*

$$\Gamma(\xi) \rightarrow \begin{cases} \Gamma_1, & \xi \rightarrow +\infty, \\ \Gamma_2, & \xi \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (3.7)$$

удовлетворяющих условию (3.6), существует единственная кусочно-гладкая деформация $\tilde{\Gamma}(\xi)$ вида (3.4), (3.5), такая, что $\lambda(\xi)$ (локально) является решением уравнения Уизема (1.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем риманову поверхность $\tilde{\Gamma}(\xi, 1)$ вида (3.5) так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{cases} \operatorname{Im} S(\lambda(\xi)|\lambda_1, \lambda(\xi)) = 0, \\ \operatorname{Re} S(\lambda(\xi)|\lambda_1, \lambda(\xi)) = \xi. \end{cases} \quad (3.8)$$

В силу леммы 3.1 кривая $\operatorname{Im} S = 0$ проходит через точку λ_1 и пересекает вещественную ось в некоторой точке $\lambda(\xi_{\text{нач}}) = \bar{\lambda}(\xi_{\text{нач}})$. В этой точке происходит «рождение» зоны $(\lambda(\xi), \bar{\lambda}(\xi))$.

По следствию теоремы 2.3 движение точки $\lambda(\xi)$ по кривой $\operatorname{Im} S = 0$ происходит монотонно и определяется уравнением (3.2) $\operatorname{Re} S = \xi$.

Рис. 2. Эволюция первой зоны $(\lambda_1, \bar{\lambda}_1)$.

В момент $\xi_1 = \text{Re } S(\lambda_1 | \lambda_1, \lambda_1)$ произойдет «схлопывание» зон $(\lambda(\xi), \bar{\lambda}(\xi))$ и $(\lambda_1, \bar{\lambda}_1)$, что соответствует «нульзонной» поверхности $\tilde{\Gamma}(\xi_1, 1) = \mathbb{C}$.

В силу условия (3.6) нульзональная поверхность $\tilde{\Gamma}(\xi_1, 1) = \mathbb{C}$ существует в интервале $\xi_1 < \xi < \xi_2$, где $\xi_2 = \text{Re } S(\lambda_2 | \lambda_2, \lambda_2)$. В момент ξ_2 происходит «рождение» двухзонной поверхности (3.5) $\tilde{\Gamma}(\xi, 2)$, где $\lambda(\xi_2) = \lambda_2$, $\bar{\lambda}(\xi_2) = \bar{\lambda}_2$. По лемме 3.1 существует решение уравнения $\text{Im } S(\lambda(\xi) | \lambda(\xi), \lambda_2) = 0$, удовлетворяющее условию $\lambda(\xi_2) = \lambda_2$, а по теореме 3.1 и следствию теоремы 2.3 это решение единственно на интервале $\xi_2 < \xi < \xi_{\text{кон}}$, где точка $\xi_{\text{кон}}$ определяется в силу леммы 3.3 из условия «схлопывания» зоны $(\lambda(\xi), \bar{\lambda}(\xi))$ на вещественной оси: $\xi_{\text{кон}} = S(\lambda(\xi_{\text{кон}}) | \lambda(\xi_{\text{кон}}), \lambda_2)$, $\lambda(\xi_{\text{кон}}) = \bar{\lambda}(\xi_{\text{кон}})$.

Рис. 3. Эволюция второй зоны $(\lambda_2, \bar{\lambda}_2)$.

В этот момент заканчивается эволюция римановой поверхности $\tilde{\Gamma}(\xi)$, т.е. далее $\tilde{\Gamma}(\xi) = \Gamma_2$ при $\xi > \xi_{\text{кон}}$.

Таким образом построена кусочно-гладкая поверхность (3.4), удовлетворяющая уравнению Узима. Ее единственность вытекает из условия непрерывности узимовской деформации и теорем 2.3 и 3.1. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Обсудим подробнее гладкость решения исходного уравнения синус-Гордон в точках «схлопывания» или «рождения» зон. В общем случае предложенная в теореме 3.3 конструкция обеспечивает лишь непрерывность приближенного решения $u(x, t)$, восстановленного по формуле (1.2). Однако в ряде случаев из нее вытекает гладкость построенного решения. Так, например, в момент $\xi = \xi_1$, отвечающий вырождению двухзонной поверхности $\tilde{\Gamma}(\xi)$ в нульзонную (см. рис. 2), решение (1.2) вырождается в бризер

$$u(x, t) \rightarrow 4 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 \cos((t - \xi_1 x)(1 - \xi_1^2)^{-1} \cos \varphi_1)}{\operatorname{ch}((t - \xi_1)(1 - \xi_1^2)^{-1} \sin \varphi_1)}, \quad x \rightarrow \xi_1 t,$$

где $\lambda_1 = |\lambda_1| e^{2i\varphi_1}$, $\xi_1 = (1 - 16|\lambda_1|)/(1 + 16|\lambda_1|)$.

В окрестностях точек $\xi = \xi_{\text{нач}}$ и $\xi = \xi_{\text{кон}}$ рождаются и исчезают квазипериодические волны малой амплитуды, и вопрос об их гладкой склейке с заданными периодическими граничными решениями требует отдельного рассмотрения. Отметим лишь, что подобный анализ проделывался в задаче Гуревича–Питаевского для уравнения КдФ в работе [24], где доказана C^1 -гладкость приближений Уизема в переходных областях.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Обобщение теоремы 3.3 на случай граничных условий (3.7) произвольного рода представляется существенно более трудной задачей. Ясно, что комплексные кривые $\operatorname{Im} S = 0$ имеют даже в случае рода 3 значительно более сложную структуру, а поскольку в общем случае отсутствует какая-либо монотонность $\operatorname{Re} S$ по λ_j , приходится налагать условия вида (3.6) для каждой пары точек λ_i и λ_j , соединяемых деформацией $\lambda(\xi)$ в силу уравнений (3.8). В свою очередь, подобные дополнительные условия могут привести к нарушению единственности решения, поскольку в случае рода $N > 2$ возможны различные комбинации сценариев «рождения» и «схлопывания» зон типа изображенных на рис. 2, 3.

§4. Приложение. Вычисление определителей

Напомним, что в основном тексте использовалось символическое обозначение определителя (2.1), где интегралы по циклам охватывают точки ветвления λ_i , $\bar{\lambda}_i$, как показано на рис. 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При любых $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ определитель $|1, \mu, \dots, \mu^{N-1}|$ отличен от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, напротив, $|1, \mu, \dots, \mu^{N-1}| = 0$. Тогда в силу линейной зависимости его столбцов найдется многочлен P_{N-1} степени $N - 1$, такой, что голоморфный абелев дифференциал $P_{N-1}(\mu) R^{-1}(\mu) d\mu$ имеет нулевые a -периоды, что невозможно (см. [12, с. 285]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть λ_1 — точка ветвления, такая, что $\operatorname{Im} S(\lambda_1) = 0$. Тогда для любой точки λ , такой, что $\lambda \neq \lambda_1$, $\lambda \neq \bar{\lambda}_1$, определитель $\Delta(\Lambda) = |\Lambda \mu^{-1}, \Lambda, \dots, \Lambda \mu^{N-2}|$ отличен от нуля при $\Lambda = (\lambda_1 - \mu)(\lambda - \mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\operatorname{Im} S(\lambda_1) = 0$, то по теореме 2.2 имеем $\Delta((\lambda_1 - \mu)(\bar{\lambda}_1 - \mu)) = 0$. Предполагая от противного, что $\Delta(\Lambda) = 0$, и выражая из этого равенства абелевы интегралы с особенностью в нуле через голоморфный базис $\mu^k R^{-1}(\mu) d\mu$, получим голоморфный дифференциал с нулевыми

a -периодами. Непосредственный счет показывает, что его коэффициенты равны нулю только при $\lambda = \lambda_1$ или $\lambda = \bar{\lambda}_1$, что и доказывает предложение.

СЛЕДСТВИЕ. При $\text{Im } S(\lambda_j) = 0$ в точках ветвления $\Delta((\lambda_j - \mu)^2) \neq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $N = 2$; тогда $\Delta = \Delta((\lambda_j - \mu)(\bar{\lambda}_j - \mu))$, $j = 1, 2$, равны нулю при $|\lambda_1| = |\lambda_2|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\lambda_1 = re^{i\phi_1}$, $\lambda_2 = re^{i\phi_2}$ и перейдем в гиперэллиптических интегралах к переменной ϕ : $\mu = re^{i\phi}$. Тогда

$$\Delta_{k1} = \sqrt{r} \int_{-\phi_j}^{\phi_j} e^{i\phi/2} F(\phi) d\phi, \quad \Delta_{k2} = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_{-\phi_j}^{\phi_j} e^{-i\phi/2} F(\phi) d\phi, \quad (\text{П1})$$

$$F(\phi) = \left(\frac{(e^{i\phi} - e^{i\phi_1})(e^{i\phi} - e^{-i\phi_1})}{(e^{i\phi} - e^{i\phi_2})(e^{i\phi} - e^{-i\phi_2})} \right)^{1/2}. \quad (\text{П2})$$

В интегралах (П1) мы преобразовали контуры a_1 и a_2 к дугам окружности $|\mu| = r$, воспользовавшись инвариантностью определителя Δ при замене $a_2 \mapsto a_2 \pm a_1$ во второй строке. Непосредственная проверка демонстрирует четность и вещественность функции (П2): $F(-\phi) = F(\phi) = \bar{F}(\phi)$. Выполняя замену $\phi \mapsto -\phi$ в интегралах (П1), получаем пропорциональность строк определителя, что и доказывает предложение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е, Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Наука, М., 1980.
2. Forest M. G., McLaughlin D. V. Modulation of sinh-Gordon and sine-Gordon wave-trains. Stud. Appl. Math., **68**, 11–60 (1983).
3. Bikbaev R. F., Novokshenov V. Yu. Self-similar solutions of the Whitham equations and Korteweg–de Vries equations with finite-gap boundary conditions. In: Proc. III Intern. Workshop “Nonlinear and turbulent processes in physics”, Vol. 1, Kiev, 1986, pp. 32–35.
4. Бикбаев Р. Ф., Новокшенов В. Ю. Уравнение КдФ с конечнозонными граничными условиями и однопараметрические решения уравнений Уизема. В сб.: «Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений», Уфа, 1989, с. 3–35.
5. Бикбаев Р. Ф., Шарипов Р. А. Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза в классе потенциалов с конечнозонным поведением при $t \rightarrow \infty$. Теорет. матем. физ., **78**, 345–356 (1989).
6. Levermore D. Hyperbolic structure of the KdV zero dispersion limit. Commun. Partial Diff. Equat., **13**, 485–511 (1988).
7. Бикбаев Р. Ф. Перестройка Уизема и временная асимптотика решения нелинейного уравнения Шрёдингера с конечнозонным поведением при $x \rightarrow \pm\infty$. Алгебра и анализ, **2**, 131–143 (1990).
8. Бикбаев Р. Ф., Кукулин С. Б. Периодическая граничная задача для уравнения синус-Гордон, его малые гамильтоновы возмущения и КАМ-теория для конечнозонных торов. Алгебра и анализ, **4**, 42–78 (1992).
9. Date E. Multi-soliton and quasi-periodic solution of nonlinear equations of sine-Gordon type. Osaka J. Math., **19**, 125–158 (1982).
10. Erkolani N., Forest M. G. On the manifold of real quasi-periodic sine-Gordon solutions. Commun. Math. Phys., **99**, 3–48 (1985).

11. Дубровин Б. А., Натанзон С. М. Вещественные двухзонные решения уравнения sine-Gordon. Функц. анализ и его прил., **16**, 27–43 (1982).
12. Спрингер Дж. Римановы поверхности. Мир, М., 1975.
13. Новокшенов В. Ю. Уиземовские деформации интегрируемых систем типа волчков. Функц. анализ и его прил., **52**, 50–62 (1993).
14. Дубровин Б. А., Новиков С. П. Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория. УМН, **44**, 29–98 (1989).
15. Кричевер И. М. Метод усреднения для двумерных интегрируемых уравнений. Функц. анализ и его прил., **22**, 37–52 (1988).
16. Камчатнов А. М. Нелинейные периодические волны в вынужденном комбинационном рассеянии света и рождение солитонов на фронте импульса. ЖЭТФ, **109**, 786–804 (1996).
17. Bikbaev R. F., Kudashev V. R. Example of shock waves in unstable media: the focusing nonlinear Schrödinger equation. Phys. Lett. A, **190**, 255–258 (1994).
18. Гуревич А. В., Крылов А. Л., Эль Г. А. Эволюция римановой волны в дисперсионной гидродинамике. ЖЭТФ, **101**, 1797–1807 (1992).
19. El' G. A., Gurevich A. V., Khodorovskii V. V., Krylov A. L. Modulation instability and formation of a nonlinear oscillatory structure in a “focusing” medium. Phys. Lett. A, **177**, 357–361 (1992).
20. Krichever I. M. The periodic problem for two-dimensional integrable system. In: Proc. Int. Congress of Math., Springer, Kyoto, 1991, pp. 1353–1362.
21. Krichever I. M. The dispersionless Lax equations and topological minimal models. Commun. Math. Phys., **143**, 415–429 (1992).
22. Forest M. G., Sinha A. A numerical study of nearly integrable modulation equations. In: Singular Limits of Dispersive Waves, eds. N. Ercolani et al., Plenum, New York, 1994, pp. 39–52.
23. Bronski J. C., McLaughlin D. W. Semiclassical behavior in the NLS equation, optical shocks–focusing instabilities. In: Singular Limits of Dispersive Waves, eds. N. Ercolani et al., Plenum, New York, 1994, pp. 12–25.
24. Потемин Г. В. Алгеброгеометрические конструкции автомодельных решений уравнений Уизема. УМН, **43**, вып. 5, 252–253 (1988).

Институт математики
Уфимского научного центра РАН

Поступило в редакцию
28 июня 1995 г.