Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Троицкий, М. Франк, Числа Лефшеца и геометрия операторов в W^* -модулях, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 4, 45–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa549>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:54:22

УДК 517.98

Числа Лефшеца и геометрия операторов в W^* -модулях*

© 1996. Е. В. Троицкий, М. Франк

§1. Введение

Основной целью этой работы является обобщение результатов [18, 19] в следующем направлении. Для того чтобы определить $K_0(A) \otimes \mathbb{C}$ -значные числа Лефшеца (первого типа) эндоморфизма V C^* -эллиптического комплекса, обычно предполагают, что $V = T_g$ для некоторого представления T_g компактной группы G на C^* -эллиптическом комплексе. Мы постараемся в настоящей работе отказаться от этого ограничения. За это нам придется заплатить дважды:

(1) мы вынуждены определять числа Лефшеца со значениями в некоторой группе, большей, чем $K_0(A) \otimes \mathbb{C}$;

(2) мы должны работать с W^* -алгебрами вместо общих унитарных C^* -алгебр.

При получении основных результатов мы доказали ряд вспомогательных утверждений о гильбертовых W^* - и C^* -модулях и ограниченных модульных операторах в них, которые могут представлять самостоятельный интерес.

Настоящая работа устроена следующим образом. В §2 мы доказываем необходимые факты о гильбертовых W^* -модулях и их ограниченных модульных отображениях, усиливающие результаты В. Л. Пашке [14], Ж.-Ф. Хаве [5] и М. Франка [3]. В §3 мы определяем числа Лефшеца двух типов и устанавливаем их основные свойства. В §4 обсуждается C^* -случай и препятствия к улучшению результатов §3.

Нашими стандартными источниками по теории гильбертовых C^* -модулей будут служить статьи [2, 3, 9–11, 14, 15] и книга Лэнса [8]. Основой для топологических построений являются работы [11–13, 17–19]. Мы надеемся продолжить настоящее исследование.

Авторы признательны Немецкой службе академических обменов (DAAD) за предоставленную возможность совместной работы в Лейпцигском университете в соответствии с локальным проектом «Некоммутативная геометрия». Авторы благодарят Й. Кунтца, В. М. Мануйлова, А. С. Мищенко и Р. Неста за полезные обсуждения.

§2. Гильбертовы W^* -модули и их морфизмы

Мы хотим установить некоторые весьма полезные свойства гильбертовых W^* -модулей, которые зачастую не имеют места в общем C^* -случае. Внимание специалистов было привлечено к этому специальному классу гильбертовых

* Исследование первого автора было частично поддержано Российским фондом фундаментальных исследований (грант №94-01-00108-а) и грантом No. MGM300 Международного научного фонда и Российского правительства.

C^* -модулей В. Л. Пашке в его классической работе [14], после чего этот объект стал использоваться во многих ситуациях. Факты, о которых пойдет речь ниже, могут быть установлены и для монотонно полных C^* -алгебр, хотя это и требует большой технической работы (ср. [4]), но, вообще говоря, не для более широкого класса C^* -алгебр. Однако, поскольку мы собираемся разобраться в структуре общих гильбертовых C^* -модулей и C^* -двойственных к ним, то лучше заниматься общим W^* -случаем и обойти эти сложности.

На протяжении этого параграфа мы будем обозначать через A произвольную W^* -алгебру, через $\{\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ и $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ гильбертовы A -модули и через $\widehat{\oplus}$ прямую ортогональную сумму двух гильбертовых A -модулей, в то время как $\oplus$ обозначает прямую топологическую сумму гильбертовых A -подмодулей некоторого гильбертова A -модуля без требования ортогональности двух компонент. Морфизмы модулей будут обозначаться греческими буквами. Мы начнем со свойства, обобщающего свойство двойного аннулятора произвольных множеств в W^* -алгебрах.

ЛЕММА 1. *Для каждого подмножества $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ биортогональное множество $\mathcal{S}^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{M}$ является гильбертовым A -подмодулем и прямым слагаемым A -модуля $\mathcal{M}$, равно как и его ортогональное дополнение $\mathcal{S}^\perp$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что $\mathcal{S}^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{M}$ является A -подмодулем, очевиден по определению ортогональных дополнений. Поскольку A -сопряженный банахов A -модуль $\mathcal{M}'$ к $\mathcal{M}$ является автодуальным гильбертовым A -модулем по [14, Theorem 3.2], содержащим $\mathcal{M}$ при стандартном вложении, то можно рассмотреть гильбертов A -подмодуль $\mathcal{N} = \mathcal{S}^{\perp\perp} \widehat{\oplus} (\mathcal{S}^{\perp\perp})^\perp_{\mathcal{M}}$ A -модуля $\mathcal{M}'$. Второе слагаемое является по построению ортогональным дополнением к $\mathcal{S}^{\perp\perp}$ в $\mathcal{M}'$ и, следовательно, автодуальным гильбертовым A -подмодулем и прямым слагаемым в $\mathcal{N}$ по [3, теоремы 3.2 и 2.8]. Значит, образ канонического вложения A -модуля $\mathcal{S}^{\perp\perp}$ в $\mathcal{N}$ является прямым слагаемым в $\mathcal{N}$, а в силу включения подмодулей $\mathcal{S}^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ — прямым слагаемым и в $\mathcal{M}$. $\square$

Пример 1 ниже показывает, что ситуация, отличная от описанной в лемме 1, может возникнуть, например, для гильбертовых C^* -модулей над C^* -алгеброй $A = C([0, 1])$.

ЛЕММА 2. *Пусть ϕ — ограниченный модульный морфизм A -модуля $\mathcal{M}$. Тогда ядро $\text{Ker}(\phi)$ отображения ϕ является прямым слагаемым в $\mathcal{M}$ и удовлетворяет соотношению $\text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(\phi)^{\perp\perp}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По [14, Proposition 3.6] каждое ограниченное модульное отображение ϕ модуля $\mathcal{M}$ продолжается до ограниченного модульного отображения его A -сопряженного гильбертова A -модуля $\mathcal{M}'$. Ядро продолженного оператора является прямым слагаемым модуля $\mathcal{M}'$ в силу полноты его единичного шара относительно τ_2 -сходимости, порожденной там функционалами $\{f(\langle \cdot, y \rangle) : f \in A_{*,1}, y \in \mathcal{M}'\}$ (ср. [3, Theorem 3.2]). Следовательно, ядро морфизма ϕ в $\mathcal{M}$ должно совпадать с его биортогональным дополнением в $\mathcal{M}$, и по лемме 1 оно является прямым слагаемым. $\square$

ПРИМЕР 1. Заметим, что, вообще говоря, ядро ограниченного A -линейного оператора в гильбертовом A -модуле над произвольной C^* -алгеброй A не является прямым слагаемым. Например, рассмотрим C^* -алгебру $A = C([0, 1])$ всех

непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ как гильбертов A -модуль над ней самой, снабженный стандартным скалярным произведением $\langle a, b \rangle_A = ab^*$. Определим отображение ϕ_g формулой $\phi_g(f) = g \cdot f$ для фиксированной функции

$$g(x) = \begin{cases} -2x + 1, & x \leq 1/2, \\ 0, & x \geq 1/2, \end{cases}$$

и всякого $f \in A$. Тогда $\text{Ker}(\phi_g)$ совпадает с гильбертовым A -подмодулем и (левым) идеалом $\{f \in A : f(x) = 0 \text{ для } x \in [0, 1/2]\}$, не является прямым слагаемым в A , однако совпадает с биортогональным дополнением к себе в A .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ — ограниченное A -линейное отображение. Тогда ядро $\text{Ker}(\phi)$ отображения ϕ является прямым слагаемым в $\mathcal{M}$ и удовлетворяет соотношению $\text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(\phi)^{\perp\perp}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гильбертов A -модуль $\mathcal{K}$, полученный как прямая сумма $\mathcal{K} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ с A -значным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}} + \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{N}}$. Отображение ϕ может быть отождествлено с ограниченным A -линейным отображением ϕ' в $\mathcal{K}$, действующим на прямом слагаемом $\mathcal{M}$ как ϕ , а на прямом слагаемом $\mathcal{N}$ как нулевой оператор. Поскольку ядро отображения ϕ' является по лемме 2 прямым слагаемым модуля $\mathcal{K}$, содержащим $\mathcal{N}$, то его ортогональное дополнение будет прямым слагаемым в $\mathcal{M}$. $\square$

Теперь мы в состоянии дать описание внутренней структуры произвольного гильбертова W^* -модуля, обобщающее аналогичное утверждение для автодуальных гильбертовых W^* -модулей, принадлежащее В. Л. Пашке [14, Theorem 3.12].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Каждый левый гильбертов A -модуль $\mathcal{M}$ является замыканием прямой ортогональной суммы семейства $\{D_\alpha : \alpha \in I\}$ замкнутых по норме левых идеалов $D_\alpha \subseteq A$, где замыкание этой прямой суммы определяется заданным на $\mathcal{M}$ A -значным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и где A -значные скалярные произведения на идеалах — это стандартные A -значные скалярные произведения на A . Более того, для любого ограниченного A -линейного отображения $r: \mathcal{M} \rightarrow A$ имеется сеть $\{x_\beta : \beta \in J\}$ элементов из $\mathcal{M}$, для которой предел по $\|\cdot\|_A$

$$\lim_{\beta \in J} \langle y, x_\beta \rangle$$

существует для всякого $y \in \mathcal{M}$ и равен $r(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное ограниченное A -линейное отображение $r: \mathcal{M} \rightarrow A$. Его ядро является прямым слагаемым в $\mathcal{M}$ по следствию 1. Рассмотрим его ортогональное дополнение. Поскольку r может быть продолжено до ограниченного A -линейного отображения $r(\cdot) = \langle \cdot, x_r \rangle$ в A -сопряженном к модулю $\mathcal{M}$ (автодуальном) гильбертовом A -модуле $\mathcal{M}'$ ($x_r \in \text{Ker}(r)^{\perp} \subseteq \mathcal{M}'$) и поскольку ортогональное дополнение ядра отображения r в $\mathcal{M}'$ является прямым слагаемым, изоморфным $\{Ap, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ для некоторого проектора $p \in A$, по структурной теореме [14, Theorem 3.12] для автодуальных гильбертовых W^* -модулей ортогональное дополнение ядра r по отношению к $\mathcal{M}$ изоморфно гильбертову A -модулю $\{I, \langle \cdot, \cdot \rangle_A\}$ для некоторого замкнутого по норме левого идеала $I \subseteq Ap$ в A , где левое строгое замыкание левого

идеала I является w^* -замкнутым идеалом Ap в A . Теперь r может быть отождествлено с элементом $x_r \in Ap$, а $x_r \in Ap$ является строгим левым пределом сет $\{x_\beta : \beta \in J\}$ элементов из $I \cap \mathcal{M}$ (ср. [16, §3.12]).

Наконец, по трансфинитной индукции можно разложить $\mathcal{M}$ в прямую сумму попарно ортогональных прямых слагаемых вида $\text{Ker}(r)^\perp$ для ограниченных A -линейных функционалов r на $\mathcal{M}$, где $\text{Ker}(r)^\perp$ всегда изоморфно левому замкнутому по норме идеалу I в A со стандартным A -значным скалярным произведением на нем. $\square$

Мы переходим к исследованию образов ограниченных модульных отображений гильбертовых W^* -модулей. Как показывает следующий пример, здесь возникает много неприятностей, однако можно показать, что вложения автодуальных гильбертовых W^* -модулей в гильбертовы W^* -модули являются отображениями на прямые слагаемые (в отличие от ситуации с общими гильбертовыми C^* -модулями).

ПРИМЕР 2. Пусть A — множество всех ограниченных линейных операторов $B(H)$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H с базисом $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$. Обозначим через k оператор $k(e_i) = \lambda_i e_i$ для последовательности $\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\} \in c_0(\mathbb{R})$. Тогда отображение $\phi_k : A \rightarrow A$, $\phi_k : a \rightarrow a \cdot k$, является ограниченным A -линейным отображением левого проективного гильбертова A -модуля A . Но его образ не является прямым слагаемым этого A -модуля и даже не гильбертов, поскольку прямые слагаемые в A имеют вид Ap для некоторого проектора p модуля A , а $1_A \cdot k$ равнялось бы p . Образ отображения ϕ_k является подмножеством множества всех компактных операторов в H . Заметим, что ϕ_k не инъективно.

Следующее предложение было доказано Х. Лином [10, Theorem 2.2] для произвольных C^* -алгебр A , счетно порожденных гильбертовых A -модулей $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ (без требования автодуальности) и инъективного ограниченного морфизма модулей $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ с плотным по норме образом. Мы представляем другой вариант рассуждения для аналогичной ситуации в W^* -случае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{M}$ автодуален, а $\{\mathcal{N}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ произволен. Предположим, что имеется инъективное ограниченное отображение модулей $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, причем образ удовлетворяет соотношению $\alpha(\mathcal{M})^{\perp\perp} = \mathcal{N}$. Тогда оператор $\alpha(\alpha^* \alpha)^{-1/2}$ является ограниченным модульным изоморфизмом модулей $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. В частности, они изоморфны как гильбертовы A -модули.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу автодуальности модуля $\mathcal{M}$ (ср. [14, Proposition 3.4]) отображение α допускает ограниченный сопряженный модульный морфизм $\alpha^* : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$. Поскольку $\alpha^* \alpha$ является положительным элементом C^* -алгебры $\text{End}_A(\mathcal{M})$ всех ограниченных модульных отображений гильбертова A -модуля $\mathcal{M}$, допускающих сопряженное, то его квадратный корень $(\alpha^* \alpha)^{1/2}$ корректно определяется пределом по $\|\cdot\|$:

$$(\alpha^* \alpha)^{1/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\alpha^* \alpha)\|^{1/2} \left(\text{id}_{\mathcal{M}} - \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(\text{id}_{\mathcal{M}} - \frac{(\alpha^* \alpha)}{\|(\alpha^* \alpha)\|} \right)^k \right)$$

с коэффициентами $\{\lambda_k\}$, взятыми из разложения в ряд Тейлора в нуле комплекснозначной функции $f(x) = \sqrt{1-x}$ на интервале $[0, 1]$. Более того, поскольку

$$\langle (\alpha^* \alpha)^{1/2}(x), (\alpha^* \alpha)^{1/2}(x) \rangle = \langle \alpha(x), \alpha(x) \rangle$$

и поскольку α инъективно, отображение $(\alpha^* \alpha)^{1/2}$ имеет тривиальное ядро. С другой стороны, достаточно лишь заметить, что образ отображения $(\alpha^* \alpha)^{1/2}$ является τ_1 -плотным в $\mathcal{M}$ (ср. [3]). В самом деле, для каждого A -линейного ограниченного функционала $r(\cdot) = \langle \cdot, y \rangle$ на автодуальном гильбертовом A -модуле $\mathcal{M}$, отображающего образ отображения $(\alpha^* \alpha)^{1/2}$ в нуль,

$$0 = \langle (\alpha^* \alpha)^{1/2}(x), y \rangle = \langle x, (\alpha^* \alpha)^{1/2}(y) \rangle$$

для всякого $x \in \mathcal{M}$. Следовательно, $y = 0$, поскольку $(\alpha^* \alpha)^{1/2}$ инъективно, а $x \in \mathcal{M}$ было выбрано произвольно.

Теперь рассмотрим отображение $\alpha(\alpha^* \alpha)^{-1/2}$, определенное на $\mathcal{M}$. Поскольку $(\alpha^* \alpha)^{1/2}$ имеет как τ_1 -плотный образ, так и тривиальное ядро по предположению о α , то обратный к нему неограниченный модульный оператор $(\alpha^* \alpha)^{-1/2}$ является τ_1 -плотно определенным. Получаем

$$\langle \alpha(\alpha^* \alpha)^{-1/2}(x), \alpha(\alpha^* \alpha)^{-1/2}(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

для всех x, y из $(\tau_1$ -плотной) области определения отображения $(\alpha^* \alpha)^{-1/2}$. Следовательно, оператор $\alpha(\alpha^* \alpha)^{-1/2}$ продолжается до ограниченного изометрического модульного оператора на $\mathcal{M}$ по τ_1 -непрерывности. Его образ является τ_1 -замкнутым (т.е. автодуальным прямым слагаемым в $\mathcal{N}$) и поэтому совпадает с $\mathcal{N}$ по предположению. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathcal{M}$ автодуален и $\{\mathcal{N}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ произволен. Каждое инъективное модульное отображение из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$ является гильбертовым A -модульным изоморфизмом модуля $\mathcal{M}$ на прямое слагаемое в $\mathcal{N}$.

Для наших приложений в §3 нам понадобится следующий частный результат:

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — счетно порожденные A -модули, а $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ — фредгольмов оператор (см. [13]). Тогда $\text{Ker } F$ и $(\text{Im } F)^\perp$ являются проективными конечно порожденными A -подмодулями, а $\text{Ind } F = [\text{Ker } F] - [(\text{Im } F)^\perp]$ в $K_0(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \widehat{\oplus} \mathcal{M}_1$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{N}_1$ — разложения из определения A -фредгольмова оператора:

$$F = \begin{pmatrix} F_0 & 0 \\ 0 & F_1 \end{pmatrix} : \mathcal{M}_0 \widehat{\oplus} \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{N}_1,$$

$F_0: \mathcal{M}_0 \cong \mathcal{N}_0$, $F_1: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{N}_1$, $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{N}_1$ являются проективными конечно порожденными модулями. Пусть $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in \mathcal{M}_0$ и $x_1 \in \mathcal{M}_1$, а $F(x) = 0$, так что $0 = F_0(x_0) + F_1(x_1) \in \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{N}_1$. Таким образом, $F_0(x_0) = 0$, $F_1(x_1) = 0$, а значит, $x_0 = 0$ и $x \in \mathcal{M}_1$. Поэтому $\text{Ker } F = \text{Ker } F_1 \subset \mathcal{M}_1$. По лемме 2 $\text{Ker } F$ является проективным конечно порожденным A -модулем и имеет ортогональное дополнение. Таким образом, по следствию 2

$$F = \begin{pmatrix} F_0 & 0 & 0 \\ 0 & F'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{M}_0 \widehat{\oplus} \mathcal{M}'_1 \oplus \text{Ker } F \rightarrow (\mathcal{N}_0 \oplus \overline{F(\mathcal{M}'_1)}) \widehat{\oplus} (\text{Im } F)^\perp$$

и $\text{Ind } F = [\text{Ker } F] - [(\text{Im } F)^\perp]$. $\square$

Следующий пример показывает, что ситуация может быть совершенно иной в случае общих гильбертовых C^* -модулей и их инъективных отображений.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим C^* -алгебру $A = C([0, 1])$ всех непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ как автодуальный гильбертов A -модуль над ней самой со стандартным A -значным скалярным произведением $\langle a, b \rangle_A = ab^*$. Отображение $\phi: f(x) \rightarrow x \cdot f(x)$ ($x \in [0, 1]$) является инъективным ограниченным модульным морфизмом. Его образ имеет тривиальное ортогональное дополнение, но он не замкнут по норме и, следовательно, не является прямым слагаемым в A . Его замыкание также не является прямым слагаемым в A . Тем не менее биортогональное дополнение образа отображения ϕ в A совпадает с A .

ЛЕММА 3. Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — автодуальные гильбертовы A -подмодули модуля $\mathcal{M}$. Тогда $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ является автодуальным гильбертовым A -модулем и прямым слагаемым в $\mathcal{M}$. Более того, $\mathcal{P} + \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{M}$ — автодуальный гильбертов A -подмодуль.

Если $\mathcal{P}$ является проективным и конечно порожденным, то пересечение $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ также проективно и конечно порождено. Если и $\mathcal{P}$, и $\mathcal{Q}$ проективны и конечно порождены, то теми же свойствами обладает и их сумма $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p: \mathcal{M} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp \rightarrow \mathcal{P}^\perp$ — каноническая ортогональная проекция, существующая по [3, Theorem 2.8] (ср. [2] в проективном случае). Пусть $p_{\mathcal{Q}} = p|_{\mathcal{Q}}: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}^\perp$. Поскольку $\mathcal{Q}$ — автодуальный гильбертов A -модуль, оператор $p_{\mathcal{Q}}$ допускает сопряженный и $\text{Ker } p_{\mathcal{Q}} \subseteq \mathcal{Q}$ является прямым слагаемым по лемме 2. Следовательно, он представляет собой автодуальный гильбертов A -подмодуль $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{M}$. Но $\text{Ker } p_{\mathcal{Q}} = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

Для доказательства второго утверждения надо снова воспользоваться тем фактом, что всякий автодуальный гильбертов A -подмодуль является прямым слагаемым (ср. [3]).

Если $\mathcal{P}$ является проективным и конечно порожденным, то этими же свойствами будет обладать и каждое прямое слагаемое в нем. Это замечание дает оставшиеся утверждения. $\square$

§3. Числа Лефшеца

В этом параграфе мы считаем, что A является W^* -алгеброй. Это ограничение позволяет нам применить результаты предыдущего параграфа, которые, вообще говоря, верны только в W^* -случае. Циклические гомологии мы считаем топологизированными при помощи проективной топологии в тензорном произведении.

Пусть U — унитарный оператор в проективном конечно порожденном гильбертовом A -модуле $\mathcal{P}$. Тогда

$$U = \int_{S^1} e^{i\varphi} dP(\varphi), \quad (1)$$

где $P(\varphi)$ — проекторнозначная мера, принимающая значения в W^* -алгебре всех ограниченных (допускающих сопряженный) модульных операторах в $\mathcal{P}$, а интеграл сходится по отношению к норме. Таким образом, мы имеем ограниченную

и монотонную функцию

$$L(\mathcal{P}, U): S^1 \rightarrow K_0(A), \quad \varphi \mapsto [P(\varphi)],$$

по отношению к частичному порядку в пространстве проекторов. Обозначим множество таких функций через $K_0(A)_S$.

Заметим, что можно считать числа Лефшеца для действия компактной группы, рассмотренные в [19], принимающими значения (для унитарного представления) в подпространстве конечнозначных (простых) функций

$$\text{Simple}(S^1, K_0(A)) \subset K_0(A)_S.$$

Предположим, что $\mathcal{P} = A^n$. Мы ставим в соответствие интегральной сумме интеграла (1)

$$\sum_k e^{i\varphi_k} P(\mathcal{E}_k)$$

следующий класс циклических гомологий $HC_{2l}(M(n, A))$:

$$\sum_k P(\mathcal{E}_k) \otimes \cdots \otimes P(\mathcal{E}_k) \cdot e^{i\varphi_k}.$$

Переходя к пределу, мы получаем такой элемент:

$$\tilde{T}U = \int_{S^1} e^{i\varphi} d(P \otimes \cdots \otimes P)(\varphi) \in HC_{2l}(M(n, A)).$$

Положим

$$T(U) = \text{Tr}_*^n(\tilde{T}U) \in HC_{2l}(A),$$

где Tr_*^n — след в циклических гомологиях.

ЛЕММА 4 [19, лемма 6.1]. Пусть $J: \mathcal{M} = A^m \rightarrow \mathcal{N} = A^n$ — изоморфизм, а $U_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $U_{\mathcal{N}}: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ суть A -унитарные операторы, причем $JU_{\mathcal{M}} = U_{\mathcal{N}}J$. Тогда

$$T(U_{\mathcal{M}}) = T(U_{\mathcal{N}}).$$

Сходная техника может быть развита и для проективного конечно порожденного A -модуля $\mathcal{N}$ вместо A^n . Для этого мы положим $\mathcal{N} = q(A^n)$, где q обозначает ортогональную проекцию модуля A^n на его прямое ортогональное слагаемое $\mathcal{N}$. Положим

$$U \oplus 1: A^n \cong \mathcal{N} \oplus (1 - q)A^n \rightarrow \mathcal{N} \oplus (1 - q)A^n \cong A^n,$$

$$\tilde{T}U = \int_{S^1} e^{i\varphi} d(qPq \otimes \cdots \otimes qPq)(\varphi).$$

Корректность является немедленным следствием леммы 4.

Рассмотрим A -эллиптический комплекс (E, d) и его унитарный эндоморфизм U . Результаты §2 (см. предложение 2, следствие 3, лемму 3) и стандартные рассуждения теории Ходжа дают нам возможность доказать следующую лемму.

ЛЕММА 5. Для A -фредгольмова оператора

$$F = d + d^* : \Gamma(\mathcal{E}_{\text{ev}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}_{\text{od}}),$$

имеют место соотношения

$$\text{Ker}(F|_{\Gamma(\mathcal{E}_{\text{ev}})}) \stackrel{\text{def}}{=} H_{\text{ev}}(\mathcal{E}) = \oplus H_{2i}(\mathcal{E}),$$

$$\text{Ker}(F|_{\Gamma(\mathcal{E}_{\text{od}})}) \stackrel{\text{def}}{=} H_{\text{od}}(\mathcal{E}) = \oplus H_{2i+1}(\mathcal{E}),$$

где $H_m(\mathcal{E})$ — ортогональное дополнение к $\text{Im } d \subset \text{Ker } d \subset \Gamma(\mathcal{E}_m)$, и $H_m(\mathcal{E})$ — проективные U -инвариантные гильбертовы A -модули.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $u_{2i} \in \Gamma(E_{2i})$ в силу соотношения

$$(d + d^*)(u_0 + u_2 + u_4 + \dots) = 0$$

мы получаем

$$du_0 + d^*u_2 = 0, \quad du_2 + d^*u_4 = 0, \quad \dots$$

Вместе с равенством

$$(du, d^*v) = (d^2u, v) = 0$$

это дает

$$du_0 = 0, \quad du_2 = 0, \quad \dots, \quad d^*u_2 = 0, \quad d^*u_4 = 0, \quad \dots,$$

что влечет за собой соотношение $u_{2i} \in \text{Ker}(d + d^*)$. С другой стороны, для $v_2 \in \text{Im } d$, $v_2 = dv_1$ выполняются равенства

$$(v_2, u_2) = (dv_1, u_2) = (v_1, d^*u_2) = 0.$$

Значит, $u_{2i} \in H_{2i}(E)$. Обратно, пусть $u = u_0 + u_2 + \dots$, $u_{2i} \in H_{2i}(E)$, т.е. $du_{2i} = 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), и для любого $v_{2i-1} \in E_{2i-1}$

$$(dv_{2i-1}, u_{2i}) = 0, \quad (v_{2i-1}, d^*u_{2i}) = 0,$$

так что $d^*u_{2i} = 0$. Значит, $u \in \text{Ker}(d + d^*)$. Инвариантность и проективность следуют из доказанного отождествления и следствия 3. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мы определим число Лефшеца L_1 формулой

$$L_1(\mathcal{E}, U) = \sum_i (-1)^i T(U|H_i(\mathcal{E})) \in K_0(A)_S.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Мы определим число Лефшеца L_{2l} формулой

$$L_{2l}(\mathcal{E}, U) = \sum_i (-1)^i T(U|H_i(\mathcal{E})) \in HC_{2l}(A).$$

После всего сказанного следующая теорема очевидна.

ТЕОРЕМА 1. Пусть характер Чженя Ch определен, как в [1, 6, 7]. Тогда

$$L_{2l}(\mathcal{E}, U) = \int_{S^1} (\text{Ch}_{2l}^0)_*(L_1(\mathcal{E}, U))(\varphi) d\varphi.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В ситуациях, когда эндоморфизм V эллиптического C^* -комплекса является элементом представленной на этом комплексе аменабельной группы G , A -значные скалярные произведения могут быть выбраны G -инвариантными, что дает унитарность V (см. [11]). Однако имеется еще одно препятствие, требующее новых подходов, и оно будет описано в примере 4 ниже.

§4. Препятствия в C^* -случае и близкие вопросы

Цель настоящего параграфа — продемонстрировать некоторые препятствия, возникающие в теории общих гильбертовых C^* -модулей для C^* -алгебр A , более общих, чем W^* -алгебры, которые вынудили нас налагать определенные ограничения в рассмотрении предыдущего параграфа. Для работы в общем C^* -случае часто бывает полезной следующая базовая конструкция, введенная В. Л. Пашке и Х. Лином. Она устанавливает связь между W^* -случаем и общим C^* -случаем.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 (ср. [9, Definition 1.3; 14, §4]). Пусть $\{\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ — левый предгильбертов A -модуль над заданной C^* -алгеброй A . Алгебраическое тензорное произведение $A^{**} \otimes \mathcal{M}$ становится левым A^{**} -модулем, если определить действие A^{**} на его элементарных тензорах по формуле $ab \otimes h = a(b \otimes h)$ для $a, b \in A^{**}$, $h \in \mathcal{M}$. Теперь, полагая

$$\left[\sum_i a_i \otimes h_i, \sum_j b_j \otimes g_j \right] = \sum_{i,j} a_i \langle h_i, g_j \rangle b_j$$

на конечных суммах элементарных тензоров, получим вырожденное A^{**} -значное скалярное предпроизведение. При факторизации модуля $A^{**} \otimes \mathcal{M}$ по $N = \{z \in A^{**} \otimes \mathcal{M} : [z, z] = 0\}$ получается предгильбертов A^{**} -модуль, обозначаемый далее через $\mathcal{M}^\#$. Он содержит $\mathcal{M}$ в качестве A -подмодуля. Если $\mathcal{M}$ является гильбертовым, то и $\mathcal{M}^\#$ гильбертов, и наоборот. Перенос автодуальности сложнее. Если $\mathcal{M}$ автодуален, то и $\mathcal{M}^\#$ автодуален. Однако возникает

ВОПРОС 1. Предположим, что наша C^* -алгебра A унитарна. Следует ли из автодуальности модуля $\mathcal{M}^\#$, что исходный модуль $\mathcal{M}$ уже был автодуальным?

Другие стандартные свойства, такие, например, как C^* -рефлексивность, не могут быть перенесены. Но каждый ограниченный A -линейный оператор T в $\mathcal{M}$ имеет единственное продолжение до A^{**} -линейного оператора в $\mathcal{M}^\#$, сохраняющее операторную норму (ср. [9, Definition 1.3]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ — ограниченное A -линейное отображение. Тогда ядро $\text{Ker}(\phi)$ морфизма ϕ совпадает с его биортгональным дополнением в $\mathcal{M}$. Вообще говоря, оно не является прямым слагаемым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\text{Ker}(\phi) \neq \text{Ker}(\phi)^{\perp\perp}$ по отношению к A -значному скалярному произведению в $\mathcal{M}$. Образует прямую сумму $\mathcal{L} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$. Отображение ϕ продолжается до ограниченного A -линейного отображения ψ на $\mathcal{L}$, если положить

$$\psi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \in \mathcal{M}, \\ 0, & x \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Далее, продолжим ψ до ограниченного A^{**} -линейного оператора в соответствующем гильбертовом A^{**} -модуле $\mathcal{L}^\#$. По лемме 2 оба множества $\text{Ker}(\phi)^\#$ и $(\text{Ker}(\phi)^{\perp\perp})^\#$ содержатся в ядре $\text{Ker}(\psi)$ отображения ψ , которое является прямым слагаемым в $\mathcal{L}^\#$ и удовлетворяет соотношению $\text{Ker}(\psi) = \text{Ker}(\psi)^{\perp\perp}$. Это противоречит предположению. Второе утверждение следует из примера 1. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. Ядро $\text{Ker}(r)$ любого ограниченного модульного отображения $r: \mathcal{M} \rightarrow A$ совпадает с его биортгональным дополнением в $\mathcal{M}$, но, вообще говоря, не является прямым слагаемым.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Предположим, что имеется ограниченное модульное отображение $r: \mathcal{M} \rightarrow A$ на $\mathcal{M}$ со свойством $\text{Ker}(r)^\perp = \{0\}$. Тогда r является нулевым.*

ЛЕММА 6. *Пусть $\{\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ является (левым) гильбертовым A -модулем. Для каждого ограниченного модульного отображения $r: \mathcal{M} \rightarrow A$ подмножество $\text{Ker}(r)^\perp \subseteq \mathcal{M}$ является гильбертовым A -подмодулем, изоморфным как гильбертов A -модуль замкнутому по норме (левому) идеалу D в A , снабженному стандартным A -значным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 3 множество $\text{Ker}(r)^\perp \subseteq \mathcal{M}$ может без ограничения общности считаться ненулевым. Снова образуем гильбертов A^{**} -модуль $\mathcal{M}^\#$ и продолжим r до ограниченного A^{**} -линейного отображения r' на нем. Ядро отображения r' является прямым слагаемым в $\mathcal{M}^\#$, изоморфным (левому) замкнутому по норме идеалу A^{**} как гильбертов A^{**} -модуль по следствию 1 и предложению 1. Следовательно, $\text{Ker}(r) \subseteq \text{Ker}(r') \cap \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^\#$ изоморфно (левому) замкнутому по норме идеалу D в A как (левый) гильбертов A -модуль. $\square$

Мы хотели бы получить структурную теорему о взаимоотношении гильбертовых C^* -модулей и их C^* -сопряженных банаховых C^* -модулей. Чтобы получить полную картину, введем следующую новую топологию на (левых) гильбертовых C^* -модулях по аналогии с (правой) строгой топологией на C^* -алгебре A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\{\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ является (левым) гильбертовым A -модулем. Ограниченная по норме сеть $\{x_\alpha : \alpha \in I\}$ элементов из $\mathcal{M}$ называется *фундаментальной по отношению к правой $*$ -строгой топологии*, если сеть $\{\langle y, x_\alpha \rangle : \alpha \in I\}$ является сетью Коши по отношению к топологии нормы на A для любого $y \in \mathcal{M}$. Сеть $\{x_\alpha : \alpha \in I\}$ *сходится к элементу $x \in \mathcal{M}$ в правой $*$ -строгой топологии* тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha \in I} \|\langle y, x - x_\alpha \rangle\|_A = 0$$

для любого $y \in \mathcal{M}$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\{\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ является (левым) гильбертовым A -модулем. Следующие условия эквивалентны:*

- (1) $\mathcal{M}$ автодуален;
- (2) единичный шар модуля $\mathcal{M}$ полон в правой $*$ -строгой топологии.

Кроме того, линейная оболочка пополненного по правой $*$ -строгой топологии единичного шара модуля $\mathcal{M}$ совпадает с A -сопряженным к $\mathcal{M}$ банаховым A -модулем $\mathcal{M}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что единичный шар модуля $\mathcal{M}$ полон в правой $*$ -строгой топологии. Рассмотрим произвольное нетривиальное ограниченное модульное отображение $r: \mathcal{M} \rightarrow A$ с нормой, равной единице. Сосредоточим внимание на ненулевом гильбертовом A -подмодуле $\text{Ker}(r)^\perp \subseteq \mathcal{M}$, который по лемме 6 изоморфен как гильбертов A -модуль замкнутому по норме (левому) идеалу D в A , снабженному стандартным A -значным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$. По [3, Theorem 3.2] имеется сеть $\{x_\alpha : \alpha \in I\} \subset \text{Ker}(r)^\perp$, ограниченная единицей по норме и такая, что $\tau_2 - \lim_{\alpha \in I} x_\alpha = r$ в автодуальном гильбертовом A^{**} -модуле $((\text{Ker}(r)^\perp)^\#)'$. Но все значения $r(y)$, $y \in \text{Ker}(r)^\perp$, принадлежат A и, в частности, множеству всех правых мультипликаторов C^* -подалгебры и двустороннего идеала $B = \langle \text{Ker}(r)^\perp, \text{Ker}(r)^\perp \rangle$ в A . Следовательно,

существует такая сеть $\{x_\alpha : \alpha \in I\} \subset \text{Ker}(r)^\perp$, что предел по $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$

$$\lim_{\alpha \in I} b(\langle y, x_\alpha \rangle - r(y)) = 0$$

для каждого $y \in \mathcal{M}$ и каждого $b \in B$ (ср. [16, §3.12]), где условие $y \in \mathcal{M} \subset \mathcal{M}^\#$ может подразумеваться в силу следствия 1. Поскольку множество $\{by : b \in B, y \in \text{Ker}(r)^\perp\}$ плотно по норме в $\text{Ker}(r)^\perp$, одна импликация доказана. Противоположная следует из формулы для предела по $\|\cdot\|_A$

$$r(y) = \lim_{\alpha \in I} \langle y, x_\alpha \rangle, \quad y \in \mathcal{M},$$

для $y \in \mathcal{M}$, определяющей ограниченное модульное отображение $r : \mathcal{M} \rightarrow A$ для каждой ограниченной по норме фундаментальной по отношению к правой $*$ -строгой топологии сети $\{x_\alpha : \alpha \in I\} \subset \mathcal{M}$. Попутно заключаем, что A -сопряженный банахов A -модуль $\mathcal{M}'$ для всякого гильбертова A -модуля $\mathcal{M}$ совпадает с линейной оболочкой единичного шара в $\mathcal{M}$, пополненного по правой $*$ -строгой топологии. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть D — замкнутый по норме (левый) идеал в A . Тогда $\{D, \langle \cdot, \cdot \rangle_A\}$ является автодуальным в том и только том случае, когда существует такой проектор $p \in A$, что $D \equiv Ap$ и $p \in D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если D автодуален, то тождественное вложение D в A является ограниченным A -линейным отображением, допускающим сопряженный. Он должен представляться элементом $p \in D$ со свойством $dp^* = d$ для каждого $d \in D$. Таким образом, $pp^* = p \in D$ — положительный идемпотент. Линейные свойства отображения p определяют структуру D как $D \equiv Ap$. $\square$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ — (левый) гильбертов A -модуль. Если $\mathcal{M}$ является A -рефлексивным, то каждая ограниченная по норме сеть $\{x_\alpha : \alpha \in I\}$ элементов из $\mathcal{M}$, для которой все сети вида $\{r(x_\alpha) : \alpha \in I\}$ ($r \in \mathcal{M}'$) сходятся по $\|\cdot\|_A$, имеет предел x , реализующий $r(x) = \lim_{\alpha \in I} r(x_\alpha)$ в $\mathcal{M}$. Обратное, вообще говоря, неверно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $\mathcal{M}$ не является автодуальным, поскольку в противном случае мы можем просто воспользоваться теоремой 2. Очевидно, что линейная оболочка замыкания единичного шара модуля $\mathcal{M}$ по отношению к указанной топологии является банаховым A -модулем $\mathcal{N}$. Продолжим A -значное скалярное произведение с $\mathcal{M}$ на $\mathcal{N}$ по правилу

$$\langle x, y \rangle = \lim_{\alpha \in I} \langle x_\alpha, y \rangle$$

для каждого элемента $\langle \cdot, y \rangle \in \mathcal{M}'$, где $y \in \mathcal{M}$. Поскольку сеть сходится также по отношению к правой $*$ -строгой топологии на $\mathcal{M}$, предел x может рассматриваться как A -линейный ограниченный функционал на $\mathcal{M}$. Это позволяет определить значение $\langle x, x \rangle$ тем же способом. Следовательно, $\mathcal{N}$ является гильбертовым A -модулем, содержащим $\mathcal{M}$ как гильбертов A -подмодуль и имеющим тот же самый A -сопряженный банахов A -модуль $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{N}'$ (ср. [15], где имеются схожие конструкции). Кроме того, единичный шар модуля $\mathcal{N}$ полон в новой топологии. Поскольку A -значное скалярное произведение на $\mathcal{M}$ может быть

продолжено до A -значного скалярного произведения на $\mathcal{M}'' \equiv \mathcal{N}''$ по [15, Theorem 2.4], то каждый элемент из $\mathcal{M}''$ может быть описан таким способом и $\mathcal{N}$ является A -рефлексивным.

Пусть A есть C^* -алгебра всех ограниченных линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве и $\mathcal{M}$ — множество всех компактных операторов в нем. Пусть A действует на $\mathcal{M}$ умножением слева и $\mathcal{M}$ снабжено стандартным A -значным скалярным произведением, наследуемым с A . Тогда $\mathcal{M}$ превращается в левый гильбертов A -модуль. Очевидно, что $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'' = A$. Но единичный шар модуля $\mathcal{M}$ замкнут по отношению к описанной выше топологии, поскольку, например, единица C^* -алгебры A не является компактным оператором и не может быть реализована описанным выше пределом. $\square$

ПРИМЕР 4. Рассмотрим C^* -алгебру $A = C([0, 1])$ всех непрерывных функций на единичном отрезке как гильбертов A -модуль над собой. Пусть унитарный оператор U определен формулой

$$U(f)(t) = e^{it} f(t), \quad t \in [0, 1].$$

Примем этот унитарный оператор за образующую унитарного представления аменабельной (абелевой) группы $\mathbb{Z}$. Все комплексные неприводимые представления группы $\mathbb{Z}$ одномерны. Если бы мы захотели применить теорему А. С. Мищенко [12] в этом случае, то нам бы понадобилось наличие конечного спектра у порождающего элемента представления U , что не так в данном случае. Кроме того, единственными проекторами в A и, следовательно, единственными самосопряженными идемпотентными модульными операторами на A являются 1_A и 0_A и не существует спектрального разложения элементов и нет нетривиальных прямых A -модульных слагаемых в A .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как известно, во всех важных случаях морфизм S дает изоморфизм между $HC_{2l}(A)$ и $HC_0(A)$, так что мы можем работать только со второй группой. В этой ситуации мы можем определить число Лефшеца $L_0 \in HC_0(A)$ способом из [18] для общей C^* -алгебры A .

Но для K -значных чисел даже в случае действия, например, аменабельной группы G (см. пример 4), нам нужна бесконечность и сходимость в каком-то смысле, так что мы должны переходить к $K_0(A)_S$. Естественным выражением этой бесконечности собственных значений является спектральное разложение, так что мы должны работать с W^* -алгебрами, по крайней мере для L_1 . Решающим моментом является отсутствие в такой ситуации теоремы типа [12].

Конечно, это совершенно не строгие рассуждения, и мы имеем некоторую надежду на улучшение результатов, например, для монотонно полных C^* -алгебр. Однако техника для монотонно полного случая довольно сложна, а результаты ненамного отличаются от полученных в W^* -случае (ср. [4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Connes A. Non-commutative differential geometry. Publ. Math. IHES, **62**, 41–144 (1985).
2. Dupré M. J., Fillmore P. A. Triviality theorems for Hilbert modules. In: Topics in modern operator theory, 5th International conference on operator theory. Timisoara

- and Herculane (Romania), June 2–12, 1980, Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart, 1981, pp. 71–79.
3. *Frank M.* Self-duality and C^* -reflexivity of Hilbert C^* -modules. *Z. Anal. Anwendungen*, **9**, 165–176 (1990).
 4. *Frank M.* Hilbert C^* -modules over monotone complete C^* -algebras. *Math. Nachr.*, **175**, 61–83 (1995).
 5. *Havet J.-F.* Calcul fonctionnel continu dans les modules hilbertiens autoduals. Preprint, Université d'Orléans, Orléans, France, 1988.
 6. *Karoubi M.* Homologie cyclique des groupes et des algèbres. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1*, **297**, 381–384 (1983).
 7. *Karoubi M.* Homologie cyclique et K -théorie algébrique. I. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1*, **297**, No. 8, 447–450 (1983).
 8. *Lance E. C.* Hilbert C^* -Modules—a Toolkit for Operator Algebraists. *Lect. Notes*, University of Leeds, School of Mathematics, Leeds, England, 1993.
 9. *Lin H.* Bounded module maps and pure completely positive maps. *J. Operator Theory*, **26**, 121–138 (1991).
 10. *Lin H.* Injective Hilbert C^* -modules. *Pacif. J. Math.*, **154**, 131–164 (1992).
 11. *Manuilov V. M.* Representability of Functionals and Adjointability of Operators on C^* -Hilbert Modules. Preprint 1/94, Moscow State University, Dept. Mech. and Math., Seminar “Topology and Analysis”, Moscow, Russia, Sept. 1994.
 12. *Мищенко А. С.* Представления компактных групп в гильбертовых модулях над C^* -алгебрами. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **166**, 161–176 (1984).
 13. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Индекс эллиптических операторов над C^* -алгебрами. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **43**, №4, 831–859 (1979).
 14. *Paschke W. L.* Inner product modules over B^* -algebras. *Trans. Am. Math. Soc.*, **182**, 443–468 (1973).
 15. *Paschke W. L.* The double B -dual of an inner product module over a C^* -algebra B . *Can. J. Math.*, **26**, 1272–1280 (1974).
 16. *Pedersen G. K.* C^* -Algebras and their Automorphism Groups, Academic Press, London–New York–San Francisco, 1979.
 17. *Troitsky E. V.* The index of equivariant elliptic operators over C^* -algebras. *Ann. Global Anal. Geom.*, **5**, No. 1, 3–22 (1987).
 18. *Troitsky E. V.* Lefschetz numbers of C^* -complexes. In: *Lect. Notes in Math.*, Vol. 1474, Springer, 1991, pp. 193–206.
 19. *Troitsky E. V.* Orthogonal complements and endomorphisms of Hilbert modules and C^* -elliptic complexes. In: *Novikov Conjectures, Index Theorems and Rigidity*, Vol. 2 (London Math. Soc. Lect. Notes Series, Vol. 227), 1995, pp. 309–331.

Лейпцигский университет
Отдел матем. и информатики
e-mail: frank@mathematik.uni-leipzig.d400.de

Московский государственный университет,
механико-математический факультет,
кафедра высшей геометрии и топологии
e-mail: troitsky@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
31 мая 1995 г.